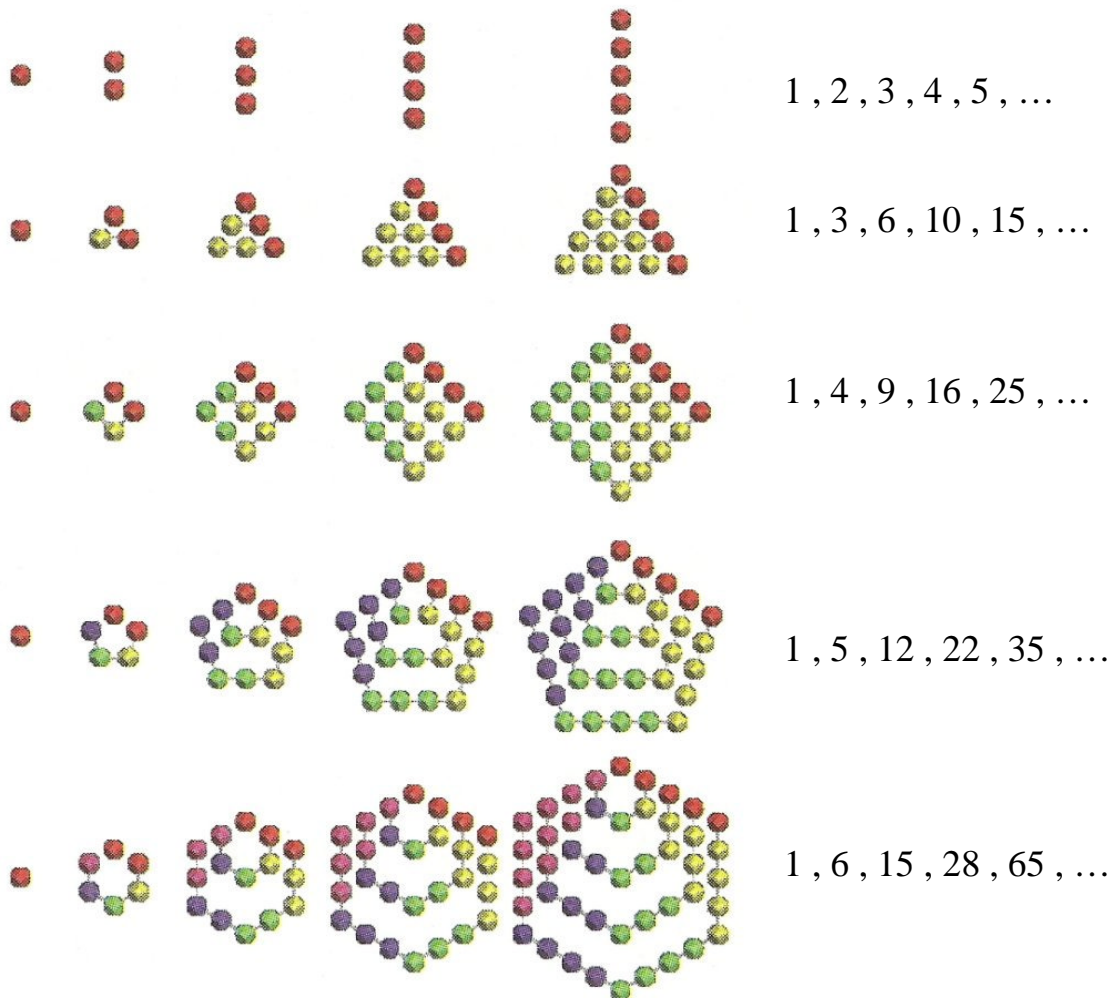


GETALTHEORIE

1



SAMENSTELLING: H. de Leuw

§1. NATUURLIJKE GETALLEN.

Als kind hebben we allemaal leren tellen: 1, 2, 3, 4,

We noemen deze getallen de **natuurlijke getallen**. De rij met natuurlijke getallen ontstaat door te beginnen met het getal 1 en telkens 1 bij de uitkomst op te tellen. Op deze manier kunnen we laten zien dat er oneindig veel natuurlijke getallen zijn.

Stelling: er zijn oneindig veel natuurlijke getallen.

Bewijs: Stel dat er een grootste natuurlijk getal is, dit getal noemen we n .

Door bij dit getal 1 op te tellen, ontstaat er een nieuw natuurlijk getal.

Dit nieuwe getal is groter dan n .

Dit kan niet, want n was het grootste natuurlijke getal.

Dus onze veronderstelling dat er een grootste natuurlijk getal was, was fout.

Conclusie: er zijn oneindig veel natuurlijke getallen.

Rekenen met natuurlijke getallen heb je al heel vaak gedaan.

Een vermenigvuldiging noemen we in de wiskunde een **product**. Zo is het product van 2 en 5 dus $2 \times 5 = 10$. De getallen die we vermenigvuldigen noemen we **factoren**. In 2×5 zijn de factoren dus 2 en 5.

Een deling noemen we een **quotiënt**. Dus het quotiënt van 30 en 5 is $30 : 5 = 6$.

Voor een optelling gebruikten we **som**, de getallen die we optellen noemen we **termen**. Dus de som van de termen 7 en 13 is $7 + 13 = 20$.

Een aftrekking noemen we het **verschil**. Zo is het verschil van 15 en 6 dus $15 - 6 = 9$.

Opgave 1:

- Bereken de som van 16 en 24.
- Bereken het verschil van 28 en 12.
- Bereken het product van 8 en 12.
- Bereken het quotiënt van 48 en 6.

Opgave 2:

Schrijf bij de volgende vragen het product of quotiënt op en bereken de uitkomst.

- De auto van Meneer de Wit rijdt 1 op 12; dat betekent dat hij met 1 liter benzine 12 km kan rijden. In een maand rijdt Meneer de Wit 780 km. Bereken hoeveel liter benzine hij hiervoor nodig heeft.
- Alle 28 leerlingen uit brugklas B1C kopen voor het eerste wiskundeproefwerk een proefwerkblok met ruitjes. Een proefwerkblok bevat 100 velletjes en kost €1,75. Hoeveel moeten de leerlingen uit B1C samen betalen?
- Peter brengt iedere zaterdag het Weekendnieuws rond in de wijk waar hij woont. Hij moet per keer 250 kranten bezorgen en krijgt daar €12,50 voor. Hoeveel verdient Peter in één jaar?

Opgave 3:

Welk getal kleiner dan 100 heeft de volgende twee eigenschappen?

- de som van de cijfers is 12.
- als je het verschil neemt tussen het cijfer van de tientallen en het cijfer van de eenheden en je verdubbelt dit verschil, is het antwoord weer 12.

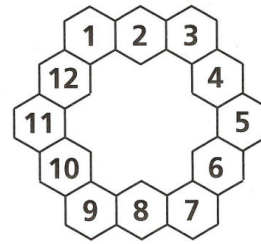
Opgave 4:

Verdeel de getallen 11, 25, 35, 43, 51, 63, 73, 85 en 91 in drie groepjes van drie getallen, zo dat de som van de drie getallen in ieder groepje steeds hetzelfde is.

Opgave 5:

Hiernaast zie je de getallen 1 tot en met 12 in de cellen van een ring staan.

Welk getal is zowel het product van twee tegenover elkaar liggende getallen en het product van twee naast elkaar liggende getallen?



Als je berekeningen met verschillende bewerkingen hebt, moet je goed op de volgorde van de verschillende bewerkingen letten. We spreken af:

Volgorde van berekeningen:

1. reken eerst binnen de haakjes.
2. vermenigvuldigen en delen gaat op volgorde van links naar rechts.
3. optellen en aftrekken gaat van links naar rechts.

Voorbeelden:

$60 : 2 \times 5 = 30 \times 5 = 150$ want van links naar rechts kom je eerst $: 2$ tegen en daarna $\times 5$.

$10 \times 5 : 2 = 50 : 2 = 25$ want eerst $\times 5$ en daarna $: 2$.

$4 + 5 \times 2 = 4 + 10 = 14$ want vermenigvuldigen gaat voor optellen.

$9 - 3 + 10 : 2 = 9 - 3 + 5 = 6 + 5 = 11$ eerst delen en daarna van links naar rechts eerst $- 3$ en dan $+ 5$.

$4 \times (2 + 3) = 4 \times 5 = 20$ eerst binnen de haakjes en daarna $\times 4$

$100 - (8 + 6) : 2 = 100 - 14 : 2 = 100 - 7 = 93$ eerst binnen de haakjes, dan delen en daarna pas aftrekken.

Opgave 6:

Bereken met tussenstappen:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| a. $6 + 4 \times 5 - 3 =$ | d. $3 + 5 \times 2 + 1 =$ | g. $30 - 2 \times (6 - 4) =$ |
| b. $7 \times (4 + 3) - 2 =$ | e. $15 + 40 : (3 + 5) =$ | h. $30 - 2 \times 6 - 4 =$ |
| c. $(8 + 4) \times 5 - 10 =$ | f. $20 : 4 + 6 \times 5 =$ | i. $(30 - 2) \times 6 - 4 =$ |

Opgave 7:

Bereken met tussenstappen:

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| a. $15 + 20 : 4 - 12 : 6 =$ | c. $15 - (6 + 2) + 3 \times 7 =$ |
| b. $100 : 4 \times 5 - 7 \times 2 =$ | d. $50 - (3 + 6) \times 4 : 12 =$ |

Opgave 8:

Bij het bedrijf HEA (huur een auto) kun je een bestelauto huren; dat kost € 80,- per dag. Per gereden kilometer moet je ook nog eens € 0,25 betalen.

- a. Klaas huurt gedurende 6 dagen een bestelauto en rijdt daarmee 1080 km. Bereken hoeveel hij moet betalen.
- b. Wim huurt gedurende 3 dagen een bestelauto en rijdt ieder dag 250 km. Bereken hoeveel hij moet betalen.

Het getal 4 is een **deler** van 24 omdat de uitkomst van het quotiënt $24 : 4$ een natuurlijk getal is. Het getal 24 noemen we een **viervoud** omdat we het kunnen krijgen als product van 4 en een natuurlijk getal.

Opgave 9:

- a. Bepaal alle delers van 24.
- b. Bepaal alle delers van 60.

Opgave 10:

- a. Bepaal alle echte delers van 6 (6 zelf is geen echte deler).
- b. Bepaal de som van alle echte delers van 6. Wat valt je op?
- c. Bepaal de som van de echte delers van 28.

In opgave 10 heb je gezien dat er natuurlijke getallen zijn die gelijk zijn aan de som van hun echte delers. Zo'n getal noemen we een **volmaakt getal**.

Definitie: een volmaakt getal is een getal dat gelijk is aan de som van zijn echte delers.

Op dit moment zijn er ongeveer 30 volmaakte getallen bekend. De eerste acht zijn:

6

28

496

8128

33550336

8589869056

137438691328

2305843008139952128

Merk op dat ze allemaal even zijn en ook allemaal op een 6 of een 8 eindigen.

Of er ook oneven volmaakte getallen zijn, is niet bekend. Wat we wel weten is dat als ze bestaan, ze minstens uit 100 cijfers moeten bestaan.

Opgave 11:

- a. Bepaal de som van alle echte delers van 220.
- b. Bepaal de som van alle echte delers van 284.

De getallen 220 en 284 noemen we **bevriende getallen** omdat van beide getallen de som van de echte delers precies het andere getal vormen.

Andere bevriende getallen zijn:

1184 en 1210

17296 en 18416

9.363.584 en 9.437.056

Tot op heden zijn er meer dan duizend paar bevriende getallen bekend.

§2. PRIEMGETALLEN.

Definitie: een **priemgetal** is een natuurlijk getal dat precies twee delers heeft, namelijk 1 en zichzelf.

Voorbeelden van priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7.

6 is een voorbeeld van een getal dat geen priemgetal is, want 6 heeft als delers 1, 2, 3 en 6.

Het getal 6 is een voorbeeld van een samengesteld getal.

Definitie: een **samengesteld getal** is een getal dat het product is van twee of meer priemgetallen.

Er is een eenvoudige manier om alle priemgetallen kleiner dan een bepaald getal, bv 100, te bepalen.

Begin met 1 door te strepen, want 1 is geen priemgetal.

Onderstreep dan het eerste priemgetal 2 en streep vervolgens alle echte veelvouden van 2 door (behalve 2 zelf): 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,, 99, 100.

Het volgende getal dat nog niet onderstreept of doorgestreept is, 3, is ook een priemgetal.

We strepen nu alle drievouden (behalve 3 zelf) door, want deze getallen kunnen toch nooit meer priem zijn:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,, 98, 99, 100.

Het eerste getal dat nog niet onderstreept of doorgestreept is, 5, is nu ook weer een priemgetal, want anders zou hij een kleiner priemgetal als factor moeten hebben. Enzovoorts.

Deze methode noemen we de **zeef van Eratosthenes**, naar de Griekse wiskundige (276-194 v Chr) die deze methode als eerste beschreven heeft.

Opgave 12:

- a. Gebruik de manier van de zeef van Eratosthenes om alle priemgetallen kleiner dan 100 te vinden.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

- b. Waarom kun je in de bovenstaande tabel ophouden met wegstrepen als je alle veelvouden van de getallen kleiner of gelijk aan 10 hebt bekeken (bedenk dat $10 \cdot 10 = 100$) ?
- c. Als we op deze manier alle priemgetallen tot en met 1000 willen vinden, vanaf welk veelvoud kunnen we dan stoppen met doorstrepen en weten we zeker dat we alle priemgetallen gevonden hebben?

Je kunt je afvragen of de rij priemgetallen ergens stopt, dus of er een grootste priemgetal is. In het volgende bewijs zullen we laten zien dat dit niet kan.

Het bewijs is bedacht door de Griekse wiskundige Euclides. Het is één van de eerste bewijzen uit het ongerijmde. Om te laten zien dat er oneindig veel priemgetallen zijn, veronderstellen we dat er eindig veel zijn. Deze veronderstelling leidt tot een tegenspraak (iets wat niet kan), dus is onze aanname fout.

Stelling: er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs:

Stel dat er een grootste priemgetal p is.

Dan bevat de rij $2, 3, 5, 7, \dots, p$ alle priemgetallen.

We maken nu het volgende getal: $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p + 1$.

Als dit getal toevallig zelf een priemgetal is, dan is het een priemgetal dat groter is dan alle priemgetallen die we tot nu toe hadden, en dus kunnen we de lijst van priemgetallen groter maken.

Als het getal geen priemgetal is, dan is het dus een samengesteld getal.

Dit getal is echter niet deelbaar door 2 omdat het gedeelte $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p$ wel deelbaar is door 2 maar 1 niet.

Dit getal is ook niet deelbaar door 3 omdat het gedeelte $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p$ wel deelbaar is door 3 maar 1 niet.

Zo is dit getal dus niet deelbaar door één van de priemgetallen uit de lijst $2, 3, 5, 7, \dots, p$ omdat het gedeelte $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p$ steeds wel te delen is door één van deze priemgetallen, maar 1 niet.

Omdat het getal $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p + 1$ een samengesteld getal is, moet het dus te delen zijn door een priemgetal dat groter is dan p . Dit kan niet want we waren er vanuit gegaan dat p het grootste priemgetal was.

Conclusie: er zijn oneindig veel priemgetallen.

Toelichting:

$2 + 1 = 3$ en 3 is een priemgetal, zo vinden we dus het nieuwe priemgetal 3.

$2 \times 3 + 1 = 7$ en 7 is een priemgetal, zo vinden we dus het nieuwe priemgetal 7.

$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$ en 31 is een priemgetal.

$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$ en 211 is een priemgetal.

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2311$ en 2311 is een priemgetal.

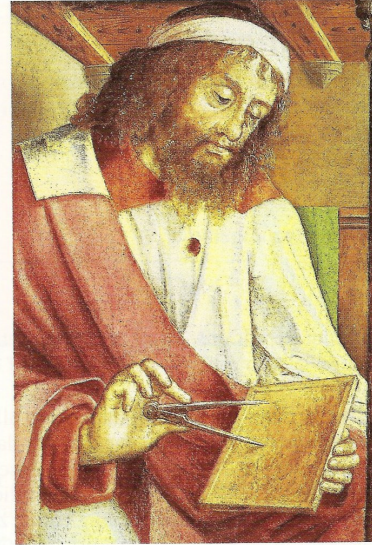
Maar $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30011$ en dit is geen priemgetal maar een samengesteld getal want $30011 = 59 \times 509$. Ondanks dat 30011 zelf geen priemgetal is, vinden we zo wel de nieuwe priemgetallen 59 en 509 die nog niet in de lijst 2, 3, 5, 7, 11 en 13 voorkwamen.

Zo is $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 + 1 = 510511 = 19 \times 97 \times 277$ en vinden we drie nieuwe priemgetallen.

En zo is $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 + 1 = 9699691 = 347 \times 27953$.

De volgende priemgetallen van de vorm $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p + 1$ vinden we voor $p = 31$, 379, 1019, 1021 en 2657. De uitkomsten worden echter te groot om deze uit te schrijven.

Ongeveer in 330 v. Chr. vestigde de Griekse wiskundige Euclides zich in het intellectuele centrum Alexandrië in Egypte. Hij was werkzaam in de Bibliotheek, de voorganger van onze universiteiten, en schreef daar zijn dertiendelige standaardwerk *De Elementen*. In deze boeken staat bijna alle Griekse wiskunde die op dat moment bekend was. Het bevat zo'n 465 stellingen over vlakke meetkunde, ruimtemeetkunde en getallentheorie. Hoewel sommige resultaten van eigen hand waren, was Euclides' belangrijkste verdienste de systematische wijze waarop hij al die onderdelen van de wiskunde presenteerde.



Onder de fundamentele resultaten over priemgetallen die Euclides bewees, zijn de volgende:

- * als een priemgetal p een deler is van het product $m \cdot n$ dan is p een deler van m of van n (of van beide).
- * er zijn oneindig veel priemgetallen.
- * elk natuurlijk getal groter dan 1 is een priemgetal, of het kan geschreven worden als het product van priemgetallen. In het laatste geval is die schrijfwijze uniek op de volgorde van de priemfactoren na.

Het feit dat er oneindig veel priemgetallen zijn, is misschien verrassend voor iemand die nog maar net begonnen is de rij van de priemgetallen te bestuderen. Want hoewel ze in het begin nogal vaak voorkomen, lijkt het alsof de priemgetallen steeds zeldzamer worden naarmate de getallen groter worden. Men zou best kunnen denken dat de rij priemgetallen op den duur helemaal ophoudt (wat dus niet het geval is zoals we eerder gezien hebben).

Zo treffen we acht priemgetallen aan onder de 20, maar slechts vier tussen 102 en 120. Nog iets verderop vinden we onder de honderd getallen tussen 2101 en 2200 slechts tien priemgetallen, en van de honderd getallen tussen 10.000.001 en 10.000.100 zijn er slechts twee priem.

De priemgetallen zijn voor de getaltheorie heel belangrijk, het zijn de bouwstenen waaruit alle natuurlijke getallen zijn opgebouwd, en wel door middel van vermenigvuldigingen.

Zo is ieder samengesteld getal altijd te schrijven als het product van twee of meer priemgetallen. Zo is bijvoorbeeld $328152 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 113$.

Elk van de getallen 2, 3, 11 en 113 is een priemgetal, ze heten de **priemfactoren** van 328152.

Het product $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 113$ noemen we de **priemontbinding** van 328152.

De priemontbinding van een getal stelt een wiskundige in staat een heleboel te zeggen over de wiskundige eigenschappen van dat getal.

Opgave 13:

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

- a. 24
- b. 100
- c. 560
- d. 2520
- e. 2257

Bij opgave e heb je gezien dat het vinden van de priemontbinding soms erg lastig kan zijn. Hiervan wordt gebruik gemaakt bij het crypto-systeem RSA. Dit systeem wordt gebruikt voor het coderen en decoderen van berichten en voor de beveiliging van elektronische betalingen met een pinpas of een creditcard. De methode is gebaseerd op het feit dat het product van grote priemgetallen gemakkelijk te bepalen is, maar dat het veel moeilijker is om uit dit product weer de priemgetallen terug te vinden.

RSA staat voor de ontwerpers van het systeem, Rivest, Shamir en Adleman. Zij bedachten het systeem in 1978 en hebben toen een boodschap vercijferd en deze de wereld in gestuurd. Het heeft tot 1994 geduurd voordat de Nederlandse wiskundige Lenstra samen met anderen de boodschap had gekraakt. De gebruikte priemgetallen bestaan uit ongeveer 200 cijfers!

Opgave 14:

Verdeel de getallen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 28, 30 en 35 in drie groepjes van drie getallen, zo dat het product van alle getallen in ieder groepje steeds hetzelfde is.

Opgave 15:

Ieder van de getallen 15, 35, 143, 323, 437 en 899 is het product van twee priemgetallen. Welk getal hoort niet in het rijtje thuis en waarom?

Opgave 16:

Welk priemgetal heeft de volgende twee eigenschappen:

- het bestaat uit twee cijfers en als we deze twee cijfers verwisselen is het resultaat nog steeds een priemgetal.
- de som van de cijfers is een priemgetal.

Aan de priemontbinding van getallen kunnen we zien welke getallen een deler zijn van dat getal en hoeveel delers een getal heeft.

Opgave 17:

- a. Bepaal alle delers van 48.
- b. Ontbind 48 in priemfactoren.
- c. Ontbind iedere deler van 48 in priemfactoren.

Opgave 18:

- a. Bepaal alle delers van 20.
- b. Wat is het grootste getal dat een deler is van zowel 20 als van 48?

We noemen dit getal de **grootste gemene deler** van 20 en 48. Notatie: $ggd(20,48)$.

Definitie: $ggd(a,b)$ is het grootste getal dat zowel een deler is van a als ook van b .

Opgave 19:

- a. Bepaal $ggd(45,75)$.
- b. Bepaal $ggd(60,150)$.
- c. Bepaal $ggd(59,80)$.

In opgave 19 heb je de antwoorden misschien gevonden door alle delers van beide getallen te bepalen en daarna te kijken welk getal de grootste deler van beide getallen is.

Voor het bepalen van de ggd van twee getallen kun je de priemfactoren van beide getallen gebruiken.

Voorbeeld:

$$780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$$

$$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

De priemfactoren die beide getallen gemeenschappelijk hebben zijn: 2, 2, 3 en 5.

$$\text{Dus } ggd(780,840) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

Opgave 20:

Bepaal met behulp van de priemontbinding:

a. $ggd(560,660)$.

b. $ggd(2618,1428)$.

Opgave 21:

Welk getal is het kleinste getal dat zowel een veelvoud is van 20 en van 48?

Dit getal heet het **kleinste gemene veelvoud** van 20 en 48.

Definitie: $kgv(a,b)$ is het kleinste getal dat zowel een veelvoud is van a en van b .

Opgave 22:

a. Bepaal $kgv(16,30)$.

b. Bepaal $kgv(20,30)$.

c. Bepaal $kgv(27,35)$.

Opgave 23:

Op een kermis staan een groot reuzenrad en een klein reuzenrad voor kinderen. Het grote reuzenrad draait eenmaal rond in 90 seconden, bij het kleine reuzenrad duurt een volledig rondje 40 seconden.

Op een bepaald moment bevindt bij ieder reuzen rad het schuitje met nummer 1 zich precies bovenaan.

a. Bereken na hoeveel seconden beide schuitjes voor het eerst weer beiden bovenaan zijn.

b. Na hoeveel seconden is dit het geval als het grote reuzenrad 75 seconden en het kleine reuzenrad 30 seconden over een rondje doen?

Net zoals bij het bepalen van de ggd van twee getallen kun je ook bij het bepalen van het kgv van twee getallen de priemontbinding van die getallen gebruiken.

Voorbeeld:

$$780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$$

$$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Het $kgv(780,840)$ bevat de priemfactoren 2, 2, 2, 3, 5, 7, 13.

$$\text{Dus } kgv(780,840) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 10920.$$

Controle:

$$10920 : 780 = 14 \text{ (precies de factoren 2 en 7 die 840 wel heeft en 780 niet).}$$

$$10920 : 840 = 13 \text{ (precies de factor 13 die 780 wel heeft en 840 niet).}$$

$$\text{Merk op: } 780 \times 840 = 655200.$$

Opgave 24:

Bepaal met behulp van de priemontbinding:

- a. $\text{kgv}(2184,6732)$.
- b. $\text{kgv}(5390,10725)$.

Bovenstaande opgaven over priemgetallen zijn nog allemaal redelijk eenvoudig, maar er zijn ook moeilijkere eigenschappen van priemgetallen die je niet zo maar snapt. Sommige problemen over priemgetallen zijn al zeer oud en zijn nog steeds niet opgelost. Hieronder geven we twee voorbeelden.

Priemtweelingen.

Er zijn priemgetallen die twee uit elkaar liggen, zo'n paar noemen we een priemtweeling. Voorbeelden van priemtweelingen zijn: 3 en 5 ; 5 en 7 ; 11 en 13 ; 101 en 103 ; maar ook 10.005.427 en 10.005.429.

Tot op heden weten we nog steeds niet of er oneindig veel priemtweelingen zijn.

Het vermoeden van Goldbach (1742).

Elk even getal groter dan 3 is de som van twee priemgetallen.

Bijvoorbeeld: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, enzovoorts.

Ook hiervan bestaat nog steeds geen bewijs of een tegenvoorbeeld (dat wil zeggen dat er tot nu toe geen enkel even getal groter dan 3 gevonden is dat niet te schrijven is als som van twee priemgetallen).

Opgave 25

Schrijf de volgende getallen als som van twee priemgetallen:

- a. 50.
- b. 100.

Het is in ieder geval duidelijk dat niet ieder natuurlijk getal de som is van twee priemgetallen.

Opgave 26

Waarom is 35 niet te schrijven als som van twee priemgetallen?

§3. Hotel Infinity.

Tijdens mijn reis door Oneindigland, logeerde ik in het Hotel ‘Infinity’. Het merkwaardige aan dit hotel (en aan alle hotels in Oneindigland) was dat het oneindig veel eenpersoonskamers had, genummerd 1, 2, 3, 4, 5,

Toen ik de eerste dag bij mijn hotel aankwam, vertelde de manager tot mijn schrik dat alle kamers bezet waren en dat er dus geen plaats voor me was. Na even te hebben nagedacht, vertelde ik de manager dat hij niet alleen plaats had voor al zijn huidige gasten, maar dat hij mij ook nog een kamer kon geven.

“Maar hoe kan dat nu?”, vroeg hij mij verbaasd. “Al mijn kamers zijn bezet en er gaat voorlopig geen gast weg”.

“Geef mij de kamer met nummer 1”, vertelde ik hem.

“Maar waar laat ik dan de gast uit die kamer?”, vroeg hij mij.

“Geef hem de kamer met nummer 2”, zei ik.

“Maar waar laat ik dan die gast”, vroeg hij mij geïrriteerd.

Omdat het me duidelijk was dat de manager mijn systeem nog niet begreep, besloot ik het hem uit te leggen.

Opgave 27:

- a. Omschrijf zo duidelijk mogelijk hoe mijn systeem verder gaat. Let er daarbij op dat iedere gast een kamer krijgt en dat er geen twee gasten op één kamer zitten.
- b. Waarom is er volgens dit systeem nu toch voor alle gasten een kamer beschikbaar.

Toen ik een uur later opnieuw in de lobby kwam, was er juist een bus met in totaal 50 nieuwe gasten gearriveerd. Ondanks dat alle kamers nog steeds bezet waren, lukte het de manager om deze 50 nieuwe gasten allemaal een kamer te bezorgen.

Opgave 28:

Hoe slaagde de manager daarin?

Toen ik de volgende avond bij mijn hotel terugkwam, stond daar een oneindig lange rij met nieuwe gasten. Deze gasten waren afkomstig van een hotel in de buurt, dat in de loop van de dag was ontruimd vanwege salmonellabacteriën in de waterleiding. De manager van Hotel ‘Infinity’ zat met zijn handen in het haar.

“Als het nu 50, of duizend of desnoods een miljoen gasten waren geweest, had ik ze wel kunnen helpen”, sprak hij. “Maar ik kan toch niet oneindig veel gasten in mijn hotel kwijt, zonder mijn oude gasten buiten te zetten”.

Opnieuw kwam ik de manager te hulp.

Opgave 29:

Hoe lukte het mij om ook al deze nieuwe gasten een kamer te bezorgen. Schrijf daarbij zo duidelijk mogelijk op welke kamer iedere gast krijgt.

Gedurende drie dagen gebeurde er niets bijzonders in het hotel, maar de dag daarna heerste er hevige paniek. Luid schreeuwend hoorde ik de manager zeggen: “Nu heb ik er genoeg van. Eerst vragen ze me 1 gast onder te brengen in een volledig bezet hotel, daarna 50 gasten en tenslotte oneindig veel nieuwe gasten. Maar nu willen ze me ook nog eens uit twee hotels, met ieder oneindig veel gasten, alle gasten onder laten brengen in mijn hotel”.

Het bleek dat ook in deze twee hotels salmonellabacteriën in de waterleiding waren gevonden, en dat deze hotels daarom waren gedwongen hun deuren te sluiten.

Opgave 30:

Hoe voorziet de manager nu iedere gast van een kamer? (Ga er vanuit dat de gasten uit de twee hotels, twee aparte rijen vormen).

De volgende dag was de manager de wanhoop nabij. Het bleek dat hij net te horen had gekregen dat over drie dagen alle hotels in Oneindigland zouden worden gesloten, behalve zijn hotel, en dat alle gasten dan in zijn hotel zouden moeten worden ondergebracht.

“Hoe los ik dit probleem op?”, vroeg de manager toen hij mij zag.

Helaas moest ik hem het antwoord schuldig blijven en daarom werd er een beloning uitgelooft voor degene die het probleem binnen drie dagen zou oplossen. Gedurende de volgende dagen hielden alle gasten zich met dit probleem bezig en op de derde dag bleek het probleem door één van de gasten te zijn opgelost.

“Stop alle gasten van dit hotel in de kamers met de nummers 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc”, stelde hij voor. “De gasten van het tweede hotel krijgen de kamers met de nummers 3, 9, 27, 81, 243, etc”.

“Natuurlijk”, onderbrak de manager hem, “en de gasten van het derde hotel krijgen de kamers met de nummers van de rij die beginnen met nummer 4”.

“Nee”, zei de gast die het probleem had opgelost, “de rij mag niet met nummer 4 beginnen”.

Opgave 31:

- Waarom mag de rij niet met nummer 4 beginnen?
- Welke kamers krijgen de gasten van het derde, respectievelijk vierde en vijfde hotel?
- Wat voor getal is het eerste nummer uit iedere rij?

Gelukkig had de manager nog genoeg tijd om alles te organiseren, maar toen alle gasten uiteindelijk in hun kamer waren beland, bleek dat er nog oneindig veel kamers niet bezet waren.

Opgave 32:

Geef de eerste tien kamers die geen gast hebben.

Uiteindelijk vond ik een systeem waarin alle kamers bezet zouden zijn. Mijn systeem hield het volgende in:

We maken een tabel waarin het nummer van de rij het nummer van het hotel voorstelt en waarin het nummer van de kolom het kamernummer voorstelt. Dus:

| | kamer | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-----|
| | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | ... | (1,n) | ... |
| | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | ... | (2,n) | ... |
| | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | ... | (3,n) | ... |
| hotel | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | ... | (4,n) | ... |
| | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | ... | (5,n) | ... |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| | (m,1) | (m,2) | (m,3) | (m,4) | (m,5) | ... | (m,n) | ... |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ |

De gasten krijgen nu een kamernummer toegewezen met behulp van vierkanten.

In kamer 1 stoppen we de gast (1,1).

In kamer 2 stoppen we de gast (1,2), in kamer 3 gast (2,2) en in kamer 4 gast (2,1).

We hebben nu alle gasten uit het vierkant linksboven met zijde 2 van een kamer voorzien.

Vervolgens komt in kamer 5 gast (1,3), in kamer 6 gast (2,3), in kamer 7 gast (3,3), in kamer 8 gast (3,2) en in kamer 9 gast (3,1).

Nu hebben we alle gasten uit het vierkant met zijde 3 gehad.

En zo gaan we op dezelfde manier in de tabel verder.

| | | | | | | | | | | | |
|-------|---|-------|---|-------|---|-------|---|-------|-------|-------|-----|
| (1,1) | | (1,2) | | (1,3) | | (1,4) | | (1,5) | ... | (1,n) | ... |
| | | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | |
| (2,1) | ← | (2,2) | | (2,3) | | (2,4) | | (2,5) | ... | (2,n) | ... |
| | | | | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | |
| (3,1) | ← | (3,2) | ← | (3,3) | | (3,4) | | (3,5) | ... | (3,n) | ... |
| | | | | | | ↓ | | ↓ | | ↓ | |
| (4,1) | ← | (4,2) | ← | (4,3) | ← | (4,4) | | (4,5) | ... | (4,n) | ... |
| | | | | | | | | ↓ | | ↓ | |
| (5,1) | ← | (5,2) | ← | (5,3) | ← | (5,4) | ← | (5,5) | ... | (5,n) | ... |
| ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| (n,1) | ← | (n,2) | ← | (n,3) | ← | (n,4) | ← | (n,5) | ←...← | (n,n) | ... |
| ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Opgave 33:

Welk kamernummer krijgt gast:

- a. (5,5) ?
- b. (12,12) ?
- c. (10,15) ?

Opgave 34:

Welke gast krijgt kamernummer:

- a. 81 ?
- b. 110 ?

Omdat nu alle kamers van het hotel weer bezet zijn, zou je zeggen dat het hotel oneindig veel winst maakt. De prijs van een overnachting in een kamer hangt af van het kamernummer. De manager had twee systemen bedacht en vroeg mij welk systeem voor hem het beste was.

Systeem A: de prijs van een kamer krijg je door 1 te delen door het kamernummer. Dus de kamers kosten achtereenvolgens: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Systeem B: de eerste kamer kost 1 en iedere volgende kamer kost de helft van zijn voorganger. Dus achtereenvolgens: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Opgave 35:

- a. Welk systeem is volgens jou het beste voor de manager?
- b. Probeer te achterhalen hoe groot het totale bedrag is dat de manager bij ieder van de twee systemen krijgt als alle kamers bezet zijn.

De volgende dag kwam de manager gedeprimeerd naar me toe. “Nu wil de directie dat ik een lijst maak waarin alle mogelijke kamerbezettingen staan”, vertelde hij mij. “De lijst moet uit een tabel bestaan waarin iedere regel een manier geeft waarop de kamers in het hotel bezet kunnen zijn. Ik ben al begonnen met de kamerbezettingen te rangschikken die uit een eindig aantal gasten bestaan”, zei hij en liet me de volgende tabel zien:

| | Kamernummer |
|------|-----------------------|
| | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ... |
| I | 1 0 0 0 0 0 0 0 0 ... |
| II | 0 1 0 0 0 0 0 0 0 ... |
| III | 1 1 0 0 0 0 0 0 0 ... |
| IV | 0 0 1 0 0 0 0 0 0 ... |
| V | 1 0 1 0 0 0 0 0 0 ... |
| VI | 0 1 1 0 0 0 0 0 0 ... |
| VII | 1 1 1 0 0 0 0 0 0 ... |
| VIII | 0 0 0 1 0 0 0 0 0 ... |

Opgave 36:

- Wat betekent een 1 in een rijtje?
- Schrijf de volgende zes rijen van de tabel op.

“Maar je bent alle kamerbezettingen vergeten die uit een oneindig aantal gasten bestaan”, zei ik.

“Die ben ik niet vergeten”, zei de manager. “Ik weet niet hoe ik die systematisch moet rangschikken”.

Opnieuw besloot ik hem een handje te helpen.

“Je kunt bijvoorbeeld beginnen met de bezetting 0101010101... waarbij dus alle even kamers bezet zijn. En bij 1010101010... zijn alle oneven kamers bezet. Daarna neem je 001001001001... om alle drievouden te hebben, gevolgd door 10010010010... voor alle drievouden+1 en 010010010010... voor alle drievouden+2”.

“Ik snap het”, zei de manager en ging ijverig aan het werk.

Twee dagen later had hij zijn lijst af.

“Weet je zeker dat je lijst compleet is”, vroeg ik hem.

“Ik weet het niet”, antwoordde hij. “De lijst bevat oneindig veel manieren waarop de kamers bezet kunnen zijn, maar ik weet niet hoe ik de lijst kan testen op volledigheid”.

Op dat moment drong het tot mij door dat zo’n lijst nooit compleet kon zijn.

“Ik kan je garanderen dat je lijst niet compleet is”, zei ik. “Hang op kamerdeur 1 de eerste mogelijkheid van je lijst, op kamerdeur 2 de tweede mogelijkheid, etc.”.

Nadat de manager zo op iedere kamerdeur een mogelijkheid had opgehangen, ging ik naar kamerdeur 1 en keek wat het eerste cijfer was. Als dit een 0 was, dan schreef ik een 1 op, en als dit een 1 was dan schreef ik een 0 op. Bij kamerdeur 2 keek ik naar het tweede cijfer van de mogelijkheid en schreef weer het andere cijfer op. Zo keek ik bij ieder kamernummer naar het cijfer op de gelijke plaats en veranderde dit al naar gelang in een 0 of een 1.

Opgave 37:

Waarom wist ik nu dat de kamerbezetting die ik aldus kreeg nog niet op de lijst voorkwam?

Toen ik de nieuwe kamerbezetting aan de manager liet zien, besepte hij dat welke rangschikking je ook zou nemen, er altijd een nieuwe kamerbezetting te maken zou zijn en dat de lijst dus uit ontelbare mogelijkheden zou bestaan.

De manager had dus een opdracht gekregen die niet uit te voeren was. Als dank voor het oplossen van al zijn problemen bood hij mij aan om gratis oneindig lang in het hotel te verblijven. Helaas kon ik daar niet op in gaan, want ik moest nog meer wiskundelands bezoeken.