Hoofdstuk 13: Mathematische statistiek

§13.1 Kansberekeningen

Opgave 1:

a. $P(som=6)=P(4\text{ en }2)+P(3\text{ en }3)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$

b. $P(som=10)=P(4\text{ en }4\text{ en }2)+P(4\text{ en }3\text{ en }3)=3\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{36}{216}$

c. $P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-binomcdf(12,\frac{1}{2},2)=0{,}981$

d. $P(42\text{ of }24)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

e. $P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-binomcdf(n,\frac{1}{6},2)>0{,}85$

neem $y_1=1-binomcdf(X,\frac{1}{6},2)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1>0{,}85$

dat is voor $X\geq 27$ dus minstens 27 keer

f. $P=\left(\frac{2}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 2!}=0{,}117$

g. dus de laatste drie keer moet je een 4 draaien, maar de derde keer mag je geen 4 draaien.

$P=\frac{6}{6}\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=0{,}025$

Opgave 2:

a. $P(3\text{ rood})=\dfrac{\binom{7}{3}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{15}{5}}=0{,}326$

b. $P(4\text{ rood})=\left(\frac{7}{15}\right)^4\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^4\cdot\binom{8}{4}=0{,}269$

c. $P(3\text{ rood,2 wit en 1 zwart})=\dfrac{\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{15}{6}}=0{,}210$

d. $P(3\text{ rood,2 wit en 1 zwart})=\left(\frac{7}{15}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{15}\right)^2\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 2!}=0{,}136$

e. $P(\overline{rrrr}r)=\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11}=0{,}033$

f. $P($ van de eerste zes knikkers zijn er 2 rood en de zevende knikker is rood$)=$

$\dfrac{\binom{7}{2}\cdot\binom{8}{4}}{\binom{15}{6}}\cdot\frac{5}{9}=0{,}163$

Opgave 3:

a. $P(2\text{ zwart})=\dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{3}{38}$

$P(X=3)=binompdf(10,\frac{3}{38},3)=0{,}033$

b. $P(2\text{ dezelfde kleur})=\dfrac{\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{9}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{61}{190}$

$P(X>4)=1-P(X\leq 4)=1-binomcdf(10,\frac{61}{190},4)=0{,}189$

c. $P(\text{ hoogstens 1 blauw }) = 1 - P(2\text{ blauw }) = 1 - \dfrac{\binom{9}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{77}{95}$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - binomcdf\,(10, \frac{77}{95}, 4) = 0{,}995$

d. $P(2\ \text{ wit }) = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{19}$

$P(4\ \text{ grepen }) = \left(\frac{18}{19}\right)^3 \cdot \frac{1}{19}$ =0,045

e. $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \left(\frac{1}{19} + \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{19} + \frac{18}{19} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{19}\right) = 0{,}850$

Opgave 4:

a. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - binomcdf\,(5{,}0.8{,}1) = 0{,}993$

b. $P(\text{ rmrmr of mrmrm }) = 0{,}8 \cdot 02 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}026$

c. $P(\text{ rrmmm of mrrmm of mmrrm of mmmrr }) = 4 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}020$

d. $0{,}8 \cdot 0{,}2^2 \cdot \binom{3}{1} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot \binom{2}{1} = 0{,}031$

e. $P(\text{ hoogstens 2 keer missen }) = binomcdf\,(10{,}0{,}15{,}2) = 0{,}820$

Opgave 5:

a. $\dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = 0{,}029$

b. $\dfrac{\binom{2}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{7}{2}} = 0{,}476$

c. $1 - P(\text{ in iedere buitenbaan zwemt een Amerikaan }) = 1 - \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = 0{,}857$

Opgave 6:

$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}$

Opgave 7:

a. $P = 0{,}4^3 \cdot 0{,}45^{12} \cdot 0{,}15^5 \cdot \frac{20!}{3! \cdot 12! \cdot 5!} = 0{,}002$

b. $P(\text{ minstens 5 keer bellen }) = P(\text{ 4 keer niet aan de voorwaarde voldoen }) = 0{,}85^4 = 0{,}522$

c. $P = \dfrac{\binom{17}{3}}{\binom{28}{3}} \cdot \frac{11}{25} = 0{,}091$

Opgave 8:

a. $P(\text{ ieder aantal ogen precies 4 keer }) = \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \cdot \frac{16!}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!} = 0{,}015$

b. $P(6 \times 2\ \text{ en }\ 4 \times 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{16!}{6! \cdot 4! \cdot 6!} = 0{,}025$

c. $P(\text{ tiende worp is hetzelfde als de derde worp }) = \frac{1}{4}$

Opgave 9:

a. $P(som=5)=P(14,23,32,41)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$P(2\times som=5)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\binom{4}{2}=\frac{27}{128}$

b. $P(verschil=2)=P(13,24,31,42)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$P(\text{ minstens één keer verschil=2 })=1-P(\text{ geen keer })=1-\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{175}{256}$

Opgave 10:

a. $P(2\ \text{ rood})=\frac{6}{a}\cdot\frac{a}{24}=\frac{6a}{24a}=\frac{1}{4}$

b. $P(\text{ 1 rode en 1 zwarte })=\frac{6}{a}\cdot\frac{24-a}{24}+\frac{a-6}{a}\cdot\frac{a}{24}=\frac{144-6a}{24a}+\frac{a^2-6a}{24a}=\frac{a^2-12a+144}{24a}$

c. $P(\text{ 1 rode en 1 zwarte })=\frac{6}{a}\cdot\frac{a-6}{a-1}+\frac{a-6}{a}\cdot\frac{6}{a-1}=\frac{6a-36}{a^2-a}+\frac{6a-36}{a^2-a}=\frac{12a-72}{a^2-a}$

d. $\dfrac{12a-72}{a^2-a}>0{,}4$

neem $y_1=\dfrac{12x-72}{x^2-x}$ en kijk in de tabel voor welke x geldt dat $y_1>0{,}4$

dat is voor $x=8\ ,\ 9\ ,\ 10\ ,\ ...,\ 22\ ,\ 23$

Opgave 11:

a. $P(X<25)=P(X\le 24)=binomcdf(125{,}0.301{,}24)=0{,}004$

b. $P(X\ge 8)=1-P(X\le 7)=1-binomcdf(80{,}0.046{,}7)=0{,}031$

c. je verwacht dat er $0{,}301\cdot 750=226$ met een 1 beginnen

$P(X\le 189)=binomcdf(750{,}0.301{,}189)=0{,}002$ omdat deze kans erg klein is, is er dus aanleiding om aan fraude te denken

d. $P=0{,}301^4\cdot 0{,}176^3\cdot 0{,}523^5\cdot\frac{12!}{4!\cdot 3!\cdot 5!}=0{,}049$