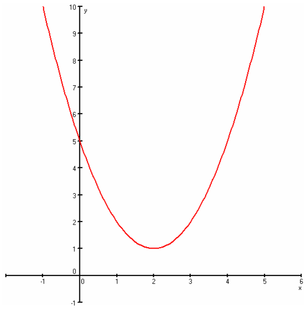
2.2 Tweede- en derdegraadsfuncties

<u>**Opgave 14:**</u>

a. zie de figuur hiernaast.



b. (2,1)

c. $y_1 = x^2 - 4x + 5$

tableset: tblstart=1

Δtbl=0,1

y_1 neemt af tot aan $x = 2$ en daarna neemt y_1 toe.

Dus het punt (2,1) is het laagste punt van de grafiek van *f*.

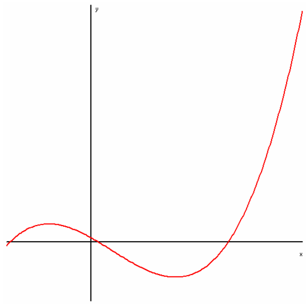
<u>**Opgave 15:**</u>

a. $y_1 = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

calc-menu optie maximum: $x = -1 \quad \wedge \quad y_1 = 3$

calc-menu optie minimum: $x = 2 \quad \wedge \quad y_1 = -6$

dus max $f(-1) = 3$ en min $f(2) = -6$



b. kleinste functiewaarde: $f(2) = -6$

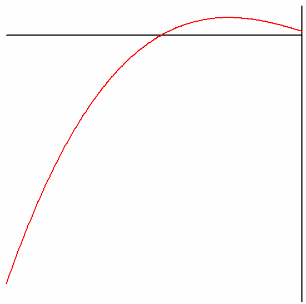
grootste functiewaarde: $f(5) = 39$

$B_f = [-6,39]$

c. kleinste functiewaarde: $f(-4) = -42$

grootste functiewaarde: $f(-1) = 3$

$B_f = [-42,3]$

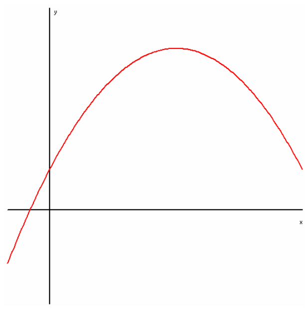


<u>**Opgave 16:**</u>

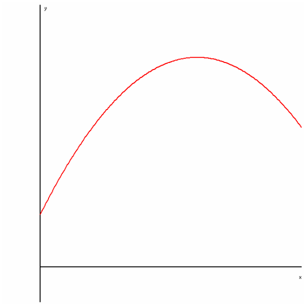
a. kleinste functiewaarde: $f(-1) = -4$

grootste functiewaarde: $f(3) = 12$

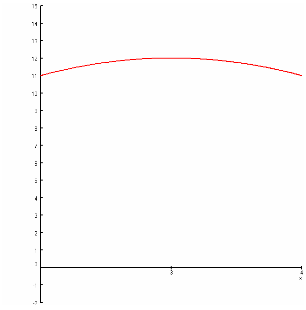
$B_f = [-4,12]$



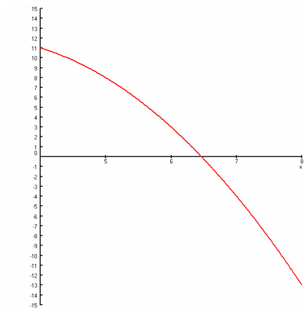
b. kleinste functiewaarde: $f(0) = 3$
grootste functiewaarde: $f(3) = 12$
$B_f = [3{,}12]$



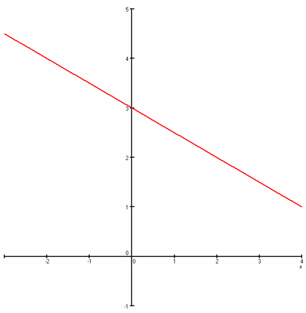
c. kleinste functiewaarde: $f(2) = f(4) = 11$
grootste functiewaarde: $f(3) = 12$
$B_f = [11{,}12]$



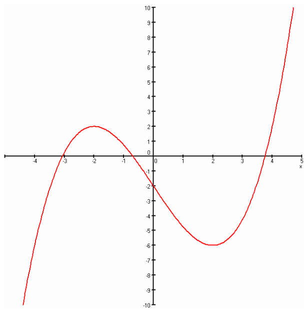
d. kleinste functie waarde: $f(8) = -13$
grootste functiewaarde: $f(4) = 11$
$B_f = [-13{,}11]$



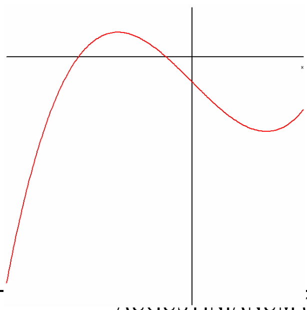
Opgave 17:
kleinste functiewaarde: $f(4) = 1$
grootste functiewaarde: $f(-3) = 4\frac{1}{2}$
$B_f = [1{,}4\frac{1}{2}]$



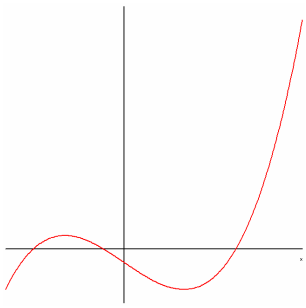
Opgave 18:
a. $y_1 = \frac{1}{4}x^3 - 3x - 2$
calc-menu optie maximum: $x = -2 \quad \wedge \quad y_1 = 2$
calc-menu optie minimum: $x = 2 \quad \wedge \quad y_1 = -6$
max $f(-2) = 2$ en min $f(2) = -6$



b. kleinste functiewaarde: $f(-5) = -18{,}25$
grootste functiewaarde: $f(-2) = 2$
$B_f = [-18{,}25;2]$



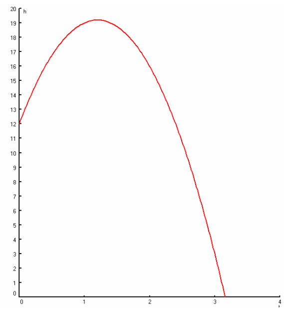
c. kleinste functiewaarde: $f(-4) = f(2) = -6$
grootste functiewaarde: $f(6) = 34$
$B_f = [-6{,}34]$



Opgave 19:

a. $y_1 = -5x^2 + 12x + 12$
calc-menu optie zero: $x = 3{,}16$
$D_h = [0;3{,}2]$

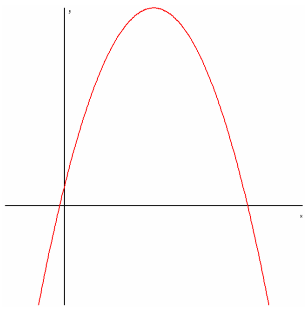
b. calc-menu optie maximum: $x = 1{,}2 \quad \wedge \quad y_1 = 19{,}2$
$B_h = [0;19{,}2]$



Opgave 20:

a. $y_1 = -x^2 + 6x + 1$
calc-menu optie maximum: $x = 3 \quad \wedge \quad y_1 = 10$
top $(3{,}10)$

b. verschuif de grafiek van opgave a 10 naar beneden
dus $y_1 = -x^2 + 6x - 9$ dus $p = -9$

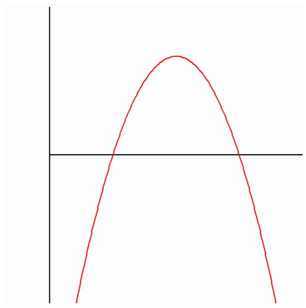


Opgave 21:

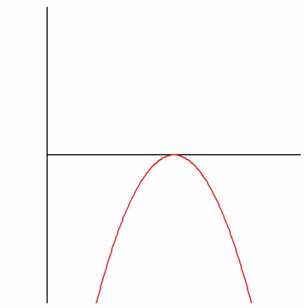
a. $D = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 36 - 8p = 0$
$-8p = -36$
$p = 4\frac{1}{2}$

b. $D = 36 - 8p > 0$
$-8p > -36$
$p < 4\frac{1}{2}$

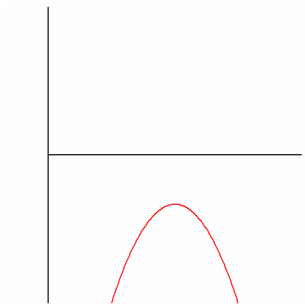
Opgave 22:



2 snijpunten
$D > 0$



1 snijpunt
$D = 0$



geen snijpunten
$D < 0$

Opgave 23:

a. $D = (-5)^2 - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot p = 25 + 2p = 0$

$2p = -25$

$p = -12\frac{1}{2}$

b. $D = 25 + 2p < 0$

$2p < -25$

$p < -12\frac{1}{2}$

Opgave 24:

a. $D = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = p^2 - 36 = 0$

$p^2 = 36$

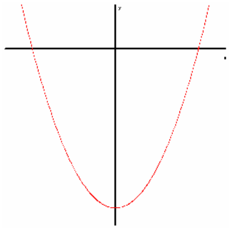
$p = 6 \quad \vee \quad p = -6$

b. dalparabool waarvan de top onder de x-as ligt, dus twee snijputen met de x-as.

$D = p^2 - 36 > 0$

$p = 6 \quad \vee \quad p = -6$

$p < -6 \quad \vee \quad p > 6$



Opgave 25:

a. minimum, dus de grafiek van f_p is een dalparabool, dus $p > 0$

negatief minimum, dus de top ligt onder de x-as, dus de grafiek heeft twee snijpunten met de x-as, dus $D > 0$

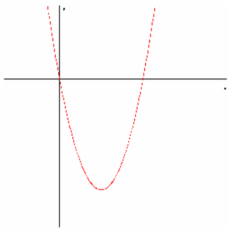
$D = (2p)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 = 4p^2 - 12p > 0$

$4p(p-3) = 0$

$p = 0 \quad \vee \quad p = 3$

$p < 0 \quad \vee \quad p > 3$

dus $p > 3$



b. maximum, dus de grafiek van f_p is een bergparabool, dus $p < 0$

negatief maximum, dus de top ligt onder de x-as, dus de grafiek heeft geen snijpunten met de x-as, dus $D < 0$

$0 < p < 3$

dus $p < 0 \quad \wedge \quad 0 < p < 3$

dus voor geen enkele waarde van p heeft de grafiek van f_p een negatief maximum.

Opgave 26:

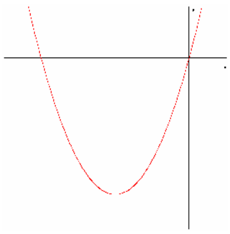
a. negatief maximum, dus de top ligt onder de x-as, dus de grafiek van f_p heeft geen snijpunten met de x-as, dus $D < 0$.

$D = p^2 - 4 \cdot -1 \cdot 2p = p^2 + 8p < 0$

$p(p+8) = 0$

$p = 0 \quad \vee \quad p = -8$

$-8 < p < 0$



b. $f_p(2p) = -4$

$-(2p)^2 + p \cdot 2p + 2p = -4$

$-4p^2 + 2p^2 + 2p = -4$

$-2p^2 + 2p + 4 = 0$

$p^2 - p - 2 = 0$

$(p+1)(p-2) = 0$

$p = -1 \quad \vee \quad p = 2$

Opgave 27:

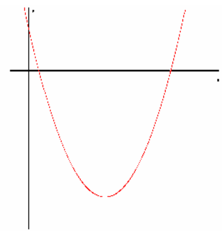
a. minimum, dus de grafiek van f_p is een dalparabool, dus $p > 0$

negatief minimum, dus de top ligt onder de x-as, dus de grafiek van f_p heeft twee snijpunten met de x-as, dus $D > 0$

$D = (p+2)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 > 0$

$p^2 + 4p + 4 - 12p > 0$

$p^2 - 8p + 4 > 0$



$p = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-16}}{2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{48}}{2}$

$p < \dfrac{8-\sqrt{48}}{2} \quad \vee \quad p > \dfrac{8+\sqrt{48}}{2}$

dus omdat $p > 0$ moet gelden: $0 < p < \dfrac{8-\sqrt{48}}{2} \quad \vee \quad p > \dfrac{8+\sqrt{48}}{2}$

b. maximum, dus de grafiek is een bergparabool, dus $p < 0$

positief maximum, dus de top ligt boven de x-as, dus de grafiek van f_p heeft twee snijpunten met de x-as, dus $D > 0$

$\left(p < \dfrac{8-\sqrt{48}}{2} \quad \vee \quad p > \dfrac{8+\sqrt{48}}{2} \right) \quad \wedge \quad (p < 0)$

dus $p < 0$

Opgave 28:

a. $ax^2 + bx = 0$

$x(ax+b) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad ax = -b$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -\dfrac{b}{a}$

dus de twee snijpunten met de x-as zijn voor $x = 0 \quad \vee \quad x = -\dfrac{b}{a}$

de top ligt precies midden tussen deze twee snijpunten, dus $x_{top} = \dfrac{0 + -\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$

b. $+c$ betekent dat de grafiek van opgave a met c omhoog wordt verschoven.
De x-coördinaat van de top verandert niet door deze verticale verschuiving.

Opgave 29:

$x_{top} = \frac{-p}{-4} = \frac{1}{4}p$

$y_{top} = -2(\frac{1}{4}p)^2 + p \cdot \frac{1}{4}p + 1$

$-\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p^2 + 1 = 9$

$\frac{1}{8}p^2 = 8$

$p^2 = 64$

$p = 8 \quad \vee \quad p = -8$

Opgave 30:

$x_{top} = \frac{-p}{2} = -\frac{1}{2}p$

$y_{top} = (-\frac{1}{2}p)^2 + p \cdot -\frac{1}{2}p + 3 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 + 3 = -\frac{1}{4}p^2 + 3$

De top ligt op de lijn $y = x + 1$ dus $y_{top} = x_{top} + 1$

$-\frac{1}{4}p^2 + 3 = -\frac{1}{2}p + 1$

$-\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + 2 = 0$

$p^2 - 2p - 8 = 0$

$(p+2)(p-4) = 0$

$p = -2 \quad \vee \quad p = 4$

Opgave 31:

a. $x_{top} = \frac{-6}{2p} = -\frac{3}{p}$

$y_{top} = p \cdot (-\frac{3}{p})^2 + 6 \cdot -\frac{3}{p} + 1 = p \cdot \frac{9}{p^2} - \frac{18}{p} + 1 = \frac{9}{p} - \frac{18}{p} + 1 = -\frac{9}{p} + 1 = -2$

$-\frac{9}{p} = -3$

$p = 3$

b. $p = 3$ dus de grafiek is een dalparabool, dus de extreme waarde is een minimum.

Opgave 32:

$x_{top} = -\frac{p+2}{2p} = \frac{-p-2}{2p} = \frac{-p}{2p} - \frac{2}{2p} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{p}$

$y_{top} = p \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{1}{p})^2 + (p+2) \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + 5$

$= p \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) + -\frac{1}{2}p - 1 - 1 - \frac{2}{p} + 5$

$= \frac{1}{4}p + 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}p - \frac{2}{p} + 3$

$y_{top} = -\frac{1}{4}p - \frac{1}{p} + 4 = 3$

$-\frac{1}{4}p - \frac{1}{p} + 1 = 0$

$-\frac{1}{4}p^2 - 1 + p = 0$

$p^2 - 4p + 4 = 0$

$(p-2)^2 = 0$

$p = 2$

$x_{top} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

Opgave 33:

$$x_{top} = \frac{-(p-4)}{2p} = \frac{-p+4}{2p} = \frac{-p}{2p} + \frac{4}{2p} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{p}$$

$$\begin{aligned} y_{top} &= p \cdot (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{p})^2 + (p-4)(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{p}) + 3 \\ &= p \cdot (\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{p} + \tfrac{4}{p^2}) - \tfrac{1}{2}p + 2 + 2 - \tfrac{8}{p} + 3 \\ &= \tfrac{1}{4}p - 2 + \tfrac{4}{p} - \tfrac{1}{2}p + 7 - \tfrac{8}{p} \\ &= -\tfrac{1}{4}p - \tfrac{4}{p} + 5 \end{aligned}$$

De top ligt op de lijn $y = x + 9$ dus geldt: $y_{top} = x_{top} + 9$.

$-\frac{1}{4}p - \frac{4}{p} + 5 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{p} + 9$

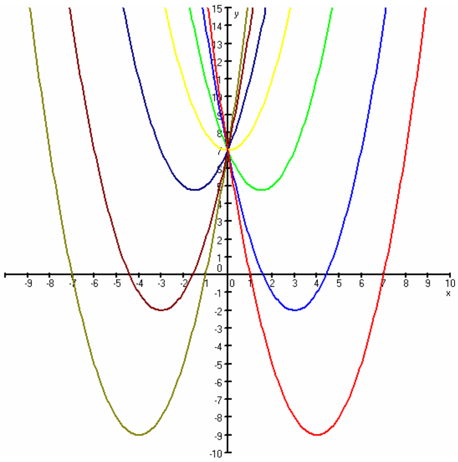
$y_1 = -\frac{1}{4}x - \frac{4}{x} + 5$ en $y_2 = \frac{2}{x} + 8\frac{1}{2}$

calc-menu optie intersection geeft: $x = -2 \quad \vee \quad x = -12$

dus $p = -2 \quad \vee \quad p = -12$

Opgave 34:

a.

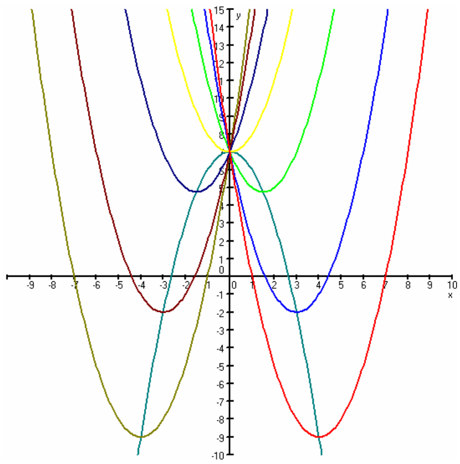


b. $x_{top} = \frac{-p}{2} = -\frac{1}{2}p$ dus $p = -2x_{top}$

$$\begin{aligned} y_{top} &= x^2 + -2x \cdot x + 7 \\ &= x^2 - 2x^2 + 7 \\ &= -x^2 + 7 \end{aligned}$$

dus alle toppen liggen op de parabool $y = -x^2 + 7$

c. zie de figuur hiernaast



Opgave 35:

$x_{top} = \frac{-p}{-\frac{1}{4}} = 4p$ dus $p = \frac{1}{4}x_{top}$

$y_{top} = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \cdot x - 6 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 6 = \frac{1}{8}x^2 - 6$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = \frac{1}{8}x^2 - 6$

Opgave 36:

$x_{top} = \frac{-6}{2p} = -\frac{3}{p}$ dus $p = -\frac{3}{x_{top}}$

$y_{top} = -\frac{3}{x} \cdot x^2 + 6x + -\frac{3}{x} = -3x + 6x - \frac{3}{x} = 3x - \frac{3}{x}$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = 3x - \frac{3}{x}$.

Opgave 37:

$x_{top} = \frac{-p}{-2} = \frac{1}{2}p$ dus $p = 2x_{top}$

$y_{top} = -x^2 + 2x \cdot x + 2 \cdot 2x = -x^2 + 2x^2 + 4x = x^2 + 4x$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = x^2 + 4x$.

Opgave 38:

$x_{top} = \frac{2p}{2p^2} = \frac{1}{p}$ dus $p = \frac{1}{x_{top}}$

$y_{top} = (\frac{1}{x})^2 \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x + 3 = \frac{1}{x^2} \cdot x^2 - 2 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = 2$.

Opgave 39:

$x_{top} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}$

Dus alle toppen liggen op de kromme $x = \frac{1}{2}$.

Opgave 40:

a. $x_{top} = \frac{-1}{2p}$

$$y_{top} = p \cdot (\tfrac{-1}{2p})^2 + \tfrac{-1}{2p} + \tfrac{1}{p}$$
$$= p \cdot \tfrac{1}{4p^2} - \tfrac{1}{2p} + \tfrac{1}{p}$$
$$= \tfrac{1}{4p} - \tfrac{1}{2p} + \tfrac{1}{p}$$
$$= \tfrac{1}{4p} - \tfrac{2}{4p} + \tfrac{4}{4p}$$
$$= \tfrac{3}{4p} = 6$$

$24p = 3$

$p = \frac{1}{8}$

b. $x_{top} = \frac{-1}{2p}$ dus $p = \frac{-1}{2x_{top}}$

$$y_{top} = \frac{3}{4p} = \frac{3}{4 \cdot \frac{-1}{2x_{top}}} = \frac{3}{\frac{-2}{x_{top}}} = -\tfrac{3}{2}x_{top}$$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = -1\tfrac{1}{2}x$.

Opgave 41:

a. $x_{top} = \frac{10}{2p} = \frac{5}{p}$

$y_{top} = p \cdot (\frac{5}{p})^2 - 10 \cdot \frac{5}{p} + p + 3$

$= p \cdot \frac{25}{p^2} - \frac{50}{p} + p + 3$

$= \frac{25}{p} - \frac{50}{p} + p + 3$

$= -\frac{25}{p} + p + 3$

De top ligt op de lijn $y = -x - 5$ dus geldt: $y_{top} = -x_{top} - 5$

$-\frac{25}{p} + p + 3 = -\frac{5}{p} - 5$

$-\frac{20}{p} + p + 8 = 0$

$-20 + p^2 + 8p = 0$

$p^2 + 8p - 20 = 0$

$(p+10)(p-2) = 0$

$p = -10 \quad \vee \quad p = 2$

als $p = -10$ geldt $x_{top} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$ en $y_{top} = \frac{-25}{-10} - 10 + 3 = -\frac{1}{2}$ dus max $f(-\frac{1}{2}) = -4\frac{1}{2}$

als $p = 2$ geldt $x_{top} = \frac{5}{2}$ en $y_{top} = -\frac{25}{2} + 2 + 3 = -7\frac{1}{2}$ dus min $f(2\frac{1}{2}) = -7\frac{1}{2}$

b. $x_{top} = \frac{5}{p}$ dus $p = \dfrac{5}{x_{top}}$

$y_{top} = -\frac{25}{p} + p + 3 = -\dfrac{25}{\frac{5}{x_{top}}} + \dfrac{5}{x_{top}} + 3 = -5x_{top} + \dfrac{5}{x_{top}} + 3$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = -5x + \frac{5}{x} + 3$.