HOOFDSTUK 4: Algebra en meetkunde.

4.4 Goniometrische verhoudingen

Opgave 38:
Voor AB heb je de cosinus nodig en voor BC de sinus.

Opgave 39:
de tangens

Opgave 40:

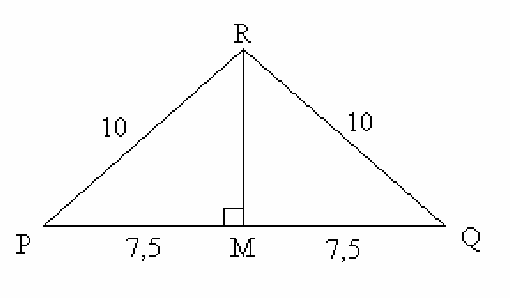
a. $\tan \angle A = \frac{3}{5}$
$\angle A = 31°$

b. $\sin \angle B = \frac{8}{11}$
$\angle B = 47°$

c. $\sin \angle G = \frac{4}{10}$
$\angle G = 24°$

d. $\tan \angle MKL = \frac{7}{10}$
$\angle MKL = 35°$

e. $\cos \angle P = \frac{7,5}{10}$
$\angle P = 41°$



Opgave 41:

a. $\cos 38° = \frac{AC}{17}$
$AC = 17 \cos 38° = 13,4$

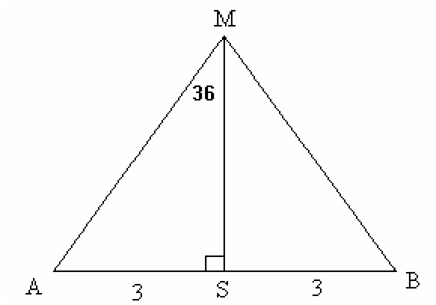
b. $\tan 55° = \frac{DF}{5}$
$DF = 5 \tan 55° = 7,1$

c. $\sin 40° = \frac{7}{GH}$
$GH = \frac{7}{\sin 40°} = 10,9$

d. $\angle KLN = 30°$
$\cos 30° = \frac{KL}{17}$
$KL = 17 \cos 30° = 14,7$

e. $PS = 3$
$\tan 75° = \frac{RS}{3}$
$RS = 3 \tan 75° = 11,2$

Opgave 42:



$\angle AMB = \frac{360}{5} = 72°$

$\angle AMS = 36°$

$\tan 36° = \frac{3}{MS}$

$MS = \frac{3}{\tan 36°} = 4{,}13$

$Opp(\Delta ABM) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4{,}13 = 12{,}39$

$Opp(ABCDE) = 5 \cdot Opp(\Delta ABM) = 5 \cdot 12{,}39 = 61{,}94$

Opgave 43:

a. $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

b. $\cos 60° = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\sin 60° = \frac{CD}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 60° = \frac{CD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

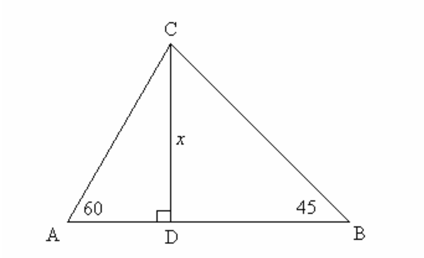
c. $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$

d. $\sin 30° = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{CD}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30° = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Opgave 44:



Stel $CD = x$

dan is $BD = x$

$\tan 60° = \frac{CD}{AD} = \frac{x}{AD}$

$AD = \frac{x}{\tan 60°} = \frac{x}{\sqrt{3}}$

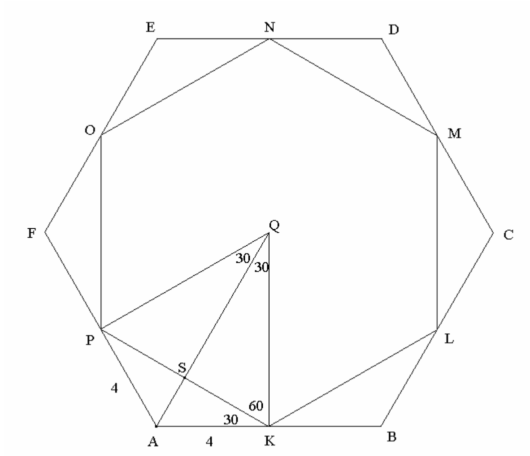
$AD + BD = \frac{x}{\sqrt{3}} + x = 12$

$x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) = 12$

$x = \frac{12}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)} = \frac{12}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{12}{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{12\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3} - 36}{1-3} = \frac{12\sqrt{3} - 36}{-2} = -6\sqrt{3} + 18$

$Opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (18 - 6\sqrt{3}) = 108 - 36\sqrt{3}$

Opgave 45:



In ΔASK geldt: $\cos 30° = \dfrac{SK}{4}$

$SK = 4\cos 30° = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ dus $PK = 4\sqrt{3}$

In ΔKSQ geldt: $\tan 60° = \dfrac{QS}{SK} = \dfrac{QS}{2\sqrt{3}}$

$QS = 2\sqrt{3} \cdot \tan 60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$

$QK = \sqrt{QS^2 + SK^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48}$

$QK = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$Opp(\Delta ABQ) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot QK = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

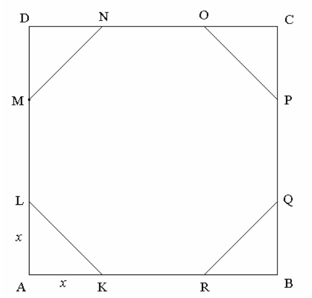
$Opp(ABCDEF) = 6 \cdot Opp(\Delta ABQ) = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$

$Opp(\Delta QPK) = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot QS = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$

$Opp(KLMNOP) = 6 \cdot Opp(\Delta QPK) = 6 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$

$Opp(gearceerde\ gebied) = Opp(ABCDEF) - Opp(KLMNOP) = 96\sqrt{3} - 72\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

Opgave 46:



Stel $AK = AL = x$

dan is $KL = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$

$KR = KL = x\sqrt{2}$

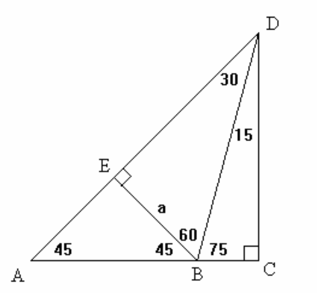
$AB = AK + KR + BR = x + x\sqrt{2} + x = 2x + x\sqrt{2} = 6$

$x(2+\sqrt{2}) = 6$

$x = \dfrac{6}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{12-6\sqrt{2}}{4-2} = \dfrac{12-6\sqrt{2}}{2} = 6 - 3\sqrt{2}$

$KL = x \cdot \sqrt{2} = (6-3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 6$

Opgave 47:



a. $AE = BE = a$

$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

In ΔBDE geldt:

$\tan 60° = \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{DE}{a}$

$DE = a \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$

dus $AD = AE + DE = a + a\sqrt{3}$

In ΔACD geldt:

$\cos 45° = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{CD}{a + a\sqrt{3}}$

$CD = \cos 45° \cdot (a + a\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (a + a\sqrt{3}) = \frac{1}{2}a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{6}$

$BC = AC - AB = CD - AB = \frac{1}{2}a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{6} - a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6} - \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

b. $BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$

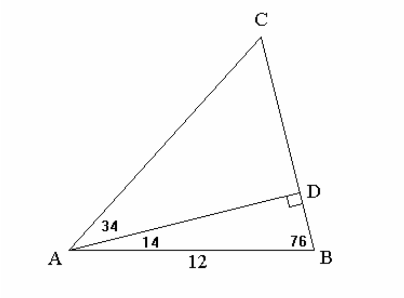
$$\sin 15^\circ = \frac{BC}{BD} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{6} - \frac{1}{2}a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{6}}{2a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{BC}{CD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12} - 6 - 2 + \sqrt{12}}{2 - 6} =$$

$$\frac{2\sqrt{12} - 8}{-4} = \frac{4\sqrt{3} - 8}{-4} = -\sqrt{3} + 2 = 2 - \sqrt{3}$$

Opgave 48:



In ΔABD geldt:

$$\sin 76^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{12}$$

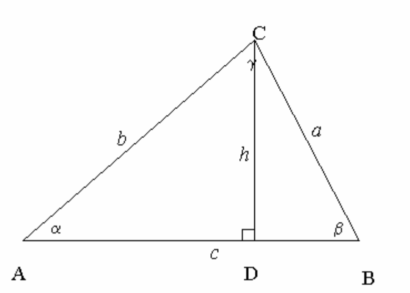
$$AD = 12 \sin 76^\circ = 11{,}64$$

In ΔACD geldt:

$$\cos 34^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{11{,}64}{AC}$$

$$AC = \frac{11{,}64}{\cos 34^\circ} = 14{,}04$$

Opgave 49:



In ΔACD geldt: $\sin\alpha = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{h}{b}$ dus $h = b \cdot \sin\alpha$

In ΔBCD geldt: $\sin\beta = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{h}{a}$ dus $h = a \cdot \sin\beta$

Dus $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$

Dus $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$

Op dezelfde manier kun je bewijzen:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Dus $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Opgave 50:

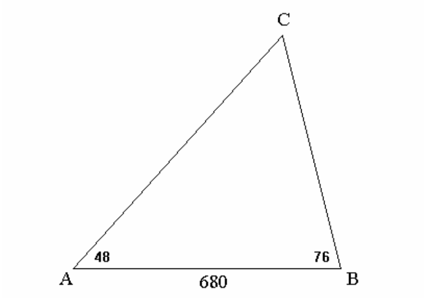
a. $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 50^\circ - 75^\circ = 55^\circ$

b. $\dfrac{6{,}8}{\sin 50^\circ} = \dfrac{b}{\sin 75^\circ} = \dfrac{c}{\sin 55^\circ}$

$$b = \frac{6{,}8 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 50^\circ} = 8{,}6$$

$$c = \frac{6{,}8 \cdot \sin 55^\circ}{\sin 50^\circ} = 7{,}3$$

Opgave 51:



$\angle C = 180° - 48° - 76° = 56°$

$$\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle C}$$

$$\frac{AC}{\sin 76°} = \frac{680}{\sin 56°}$$

$$AC = \frac{680\cdot\sin 76°}{\sin 56°} = 796\text{ m}$$

Opgave 52:

a. $\sin 55° = 0{,}819$

b. $\sin 125° = 0{,}819$

Opgave 53:

$\angle M = 180° - 20° - 110° = 50°$

$$\frac{KL}{\sin\angle M} = \frac{KM}{\sin\angle L} = \frac{LM}{\sin\angle K}$$

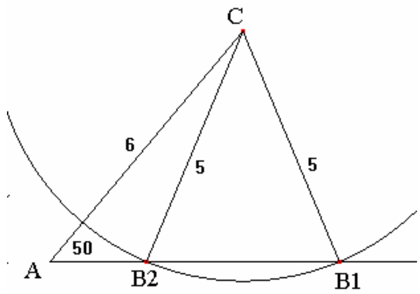
$$\frac{KL}{\sin 50°} = \frac{KM}{\sin 110°} = \frac{5{,}3}{\sin 20°}$$

$$KL = \frac{5{,}3\cdot\sin 50°}{\sin 20°} = 11{,}9$$

$$KM = \frac{5{,}3\cdot\sin 110°}{\sin 20°} = 14{,}6$$

Opgave 54:

a. Teken vanuit punt *A* een halflijn naar rechts.
Teken bij punt *A* een hoek van $50°$.
Teken lijnstuk *AC* zo dat $AC = 6$.
Teken een cirkel met middelpunt *C* en straal 5.
Waar deze cirkel de halflijn snijdt ligt punt *B*
(twee mogelijkheden).



b. $$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}$$

$$\frac{5}{\sin 50°} = \frac{6}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{6\cdot\sin 50°}{5} = 0{,}919$$

$\beta = 67°$

$\gamma = 180° - 50° - 67° = 63°$

$$\frac{c}{\sin 63°} = \frac{5}{\sin 50°}$$

$$c = \frac{5\cdot\sin 63°}{\sin 50°} = 5{,}8$$

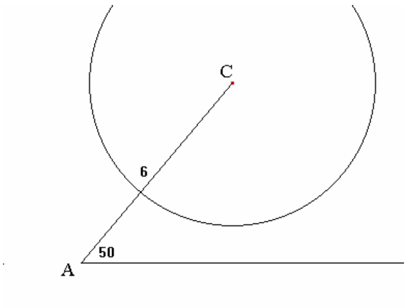
c. $\sin\beta = 0{,}919$

$\beta = 180° - 67° = 113°$

$\gamma = 180° - 50° - 113° = 17°$

$$\frac{c}{\sin 17^\circ} = \frac{5}{\sin 50^\circ}$$
$$c = \frac{5 \cdot \sin 17^\circ}{\sin 50^\circ} = 1{,}9$$

Opgave 55:



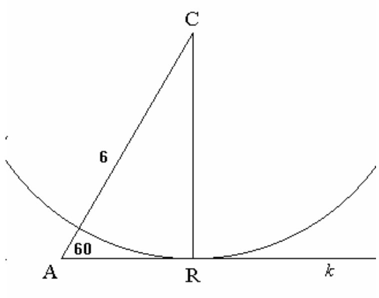
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{4}{\sin 50^\circ} = \frac{6}{\sin\beta}$$
$$\sin\beta = \frac{6 \cdot \sin 50^\circ}{4} = 1{,}15$$

β bestaat niet

Of: als je de cirkel met middelpunt C en straal 4 tekent, dan snijdt deze cirkel de halflijn niet.

Opgave 56:

Teken de cirkel met middelpunt C die de halflijn k raakt in punt R.
Voor deze waarde van a is er één cirkel.
Als de straal van de cirkel iets groter wordt dan snijdt de cirkel de halflijn in twee punten (zie ook opgave 54) zodat er twee driehoeken mogelijk zijn.
Als de straal nog groter wordt schuift het linker snijpunt naar punt A toe. Op het moment dat dit linker snijpunt samenvalt met punt A is er nog maar één driehoek. Als de straal nog groter wordt heb je nog steeds maar één driehoek.



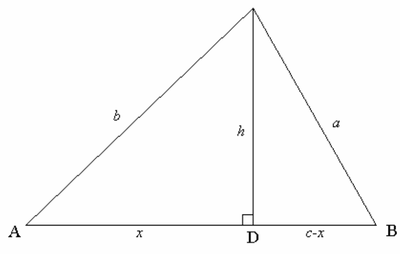
$$\sin 60^\circ = \frac{CR}{6}$$
$$CR = 6 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

a. geen driehoek als $a < 3\sqrt{3}$
b. één driehoek als $a = 3\sqrt{3} \quad \vee \quad a \geq 6$
c. twee driehoeken als $3\sqrt{3} < a < 6$

Opgave 57:

a. je kent alleen 3 zijden en voor de sinusregel heb je twee hoeken en een zijde of twee zijden en een hoek nodig.
b. je moet een hoek kennen tegenover een gegeven zijde of een zijde tegenover een gegeven hoek.

Opgave 58:



In ΔACD geldt: $b^2 = h^2 + x^2$ dus $h^2 = b^2 - x^2$

$\cos\angle A = \dfrac{x}{b}$ dus $x = b \cdot \cos\angle A$

In ΔBCD geldt: $a^2 = h^2 + (c-x)^2$ dus $h^2 = a^2 - (c-x)^2$

Dus geldt: $a^2 - (c-x)^2 = b^2 - x^2$

$a^2 = b^2 + (c-x)^2 - x^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x + x^2 - x^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos \angle A$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$

Opgave 59:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$
$5^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos \alpha$
$25 = 36 + 49 - 84 \cdot \cos \alpha$
$84 \cdot \cos \alpha = 60$
$\cos \alpha = \frac{60}{84}$
$\alpha = 44°$
$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$
$\frac{5}{\sin 44°} = \frac{6}{\sin \beta}$
$\sin \beta = \frac{6 \cdot \sin 44°}{5} = 0{,}834$
$\beta = 56°$
$\gamma = 180° - 44° - 56° = 80°$

Opgave 60:

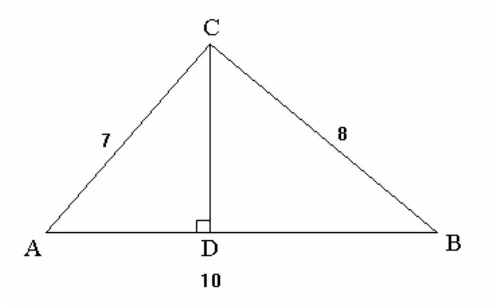
$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos \angle D$
$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos \angle D$
$16 = 25 + 49 - 70 \cdot \cos \angle D$
$70 \cdot \cos \angle D = 58$
$\cos \angle D = \frac{58}{70}$
$\angle D = 34°$
$\frac{EF}{\sin \angle D} = \frac{DF}{\sin \angle E}$
$\frac{4}{\sin 34°} = \frac{7}{\sin \angle E}$
$\sin \angle E = \frac{7 \cdot \sin 34°}{4} = 0{,}979$
$\angle E = 78° \quad \vee \quad \angle E = 102°$ als je de driehoek tekent zie je dat alleen de stompe hoek kan dus $\angle E = 102°$ en dan geldt $\angle F = 180° - 34° - 102° = 44°$

Opgave 61:

a. $a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 50° = 22{,}4$
$a = 4{,}74$

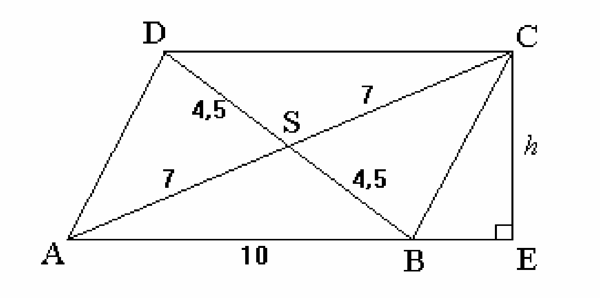
b. $\frac{4{,}74}{\sin 50°} = \frac{5}{\sin \beta}$
$\sin \beta = \frac{5 \cdot \sin 50°}{4{,}74} = 0{,}808$ dus $\beta = 54°$

Opgave 62:



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$
$8^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos \angle A$
$64 = 100 + 49 - 140 \cdot \cos \angle A$
$140 \cdot \cos \angle A = 85$
$\cos \angle A = \dfrac{85}{140} = 0{,}607$
$\angle A = 52{,}6°$
$\sin 52{,}6° = \dfrac{CD}{7}$
$CD = 7 \cdot \sin 52{,}6° = 5{,}6$

Opgave 63:



a. In ΔASB geldt:
$4{,}5^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos \angle BAS$
$20{,}25 = 49 + 100 - 140 \cdot \cos \angle BAS$
$140 \cdot \cos \angle BAS = 128{,}75$
$\cos \angle BAS = 0{,}920$
$\angle BAS = 23{,}1°$
In ΔABC geldt:
$BC^2 = 10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cos 23{,}1° = 38{,}4$
$BC = 6{,}2$

b. In ΔACE geldt: $\sin 23{,}1° = \dfrac{h}{14}$
$h = 14 \cdot \sin 23{,}1° = 5{,}49$
$Opp(ABCD) = AB \cdot h = 10 \cdot 5{,}49 = 54{,}9$