7.5 Toppen en snijpunten

Opgave 49:
één oplossing
twee oplossingen

Opgave 50:

a. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$

$x = -2 \quad \vee \quad x = 3$

$(-2,54)$ en $(3,-71)$

b. drie oplossingen
één oplossing

c. de horizontale lijnen door de toppen hebben twee snijpunten met de grafiek van *f*, daar tussen hebben de horizontale lijnen drie snijpunten met de grafiek van *f*.

d. $p < -71 \quad \vee \quad p > 54$

e. $p = -71 \quad \vee \quad p = 54$

Opgave 51:

a. $f'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = 0$

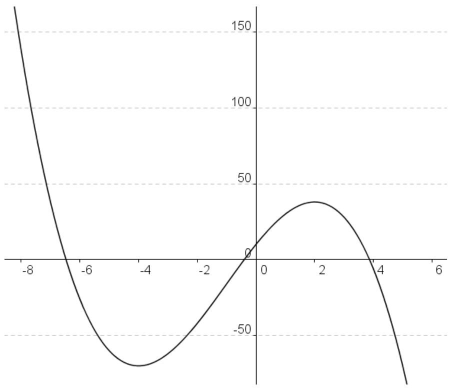
$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x+4)(x-2) = 0$

$x = -4 \quad \vee \quad x = 2$

min $f(-4) = -70$

max $f(2) = 38$



b. drie oplossingen
één oplossing

c. $-70 < p < 38$

d. $p < -70 \quad \vee \quad p > 38$

Opgave 52:

$f'(x) = 3x^3 - 6x^2 - 72x = 0$

$3x(x^2 - 2x - 24) = 0$

$x(x+4)(x-6) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -4 \quad \vee \quad x = 6$

$(-4,44)$ en $(0,300)$ en $(6,-456)$

vier oplossingen: $44 < p < 300$

drie oplossingen: $p = 44 \quad \vee \quad p = 300$

twee oplossingen: $-456 < p < 44 \quad \vee \quad p > 300$

één oplossing: $p = -456$

geen oplossingen: $p < -456$

Opgave 53:

a. $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{2x+5} + x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot 2 = 2x \cdot \sqrt{2x+5} + \dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}} =$

$$= \frac{2x(2x+5)}{\sqrt{2x+5}} + \frac{x^2}{\sqrt{2x+5}} = \frac{4x^2+10x}{\sqrt{2x+5}} + \frac{x^2}{\sqrt{2x+5}} = \frac{5x^2+10x}{\sqrt{2x+5}} = 0$$

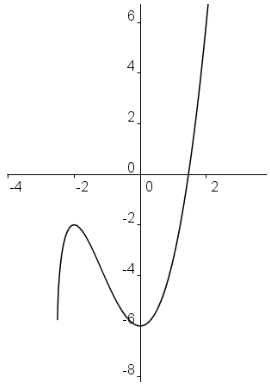
$5x^2 + 10x = 0$

$5x(x+2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$

max $f(-2) = -2$

min $f(0) = -6$



b. de grafiek begint in het punt $(-2\frac{1}{2}, -6)$

geen oplossing: $p < -6$

één oplossingen: $p > -2$

twee oplossingen: $p = -6 \quad \vee \quad p = -2$

drie oplossingen: $-6 < p < -2$

Opgave 54:

a. de lijn $y = \frac{3}{4}x + 1$ ligt boven de hoogste raaklijn, dus deze lijn heeft één snijpunt met de grafiek van *f*.

b. $-\frac{3}{4} < p < \frac{3}{4}$

Opgave 55:

a. $f'(x) = \dfrac{(x-3)\cdot 1 - (x-2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{x-3-x+2}{(x-3)^2} = \dfrac{-1}{(x-3)^2}$

$\dfrac{-1}{(x-3)^2} = -\frac{1}{4}$

$(x-3)^2 = 4$

$x - 3 = -2 \quad \vee \quad x - 3 = 2$

$x = 1 \quad \vee \quad x = 5$

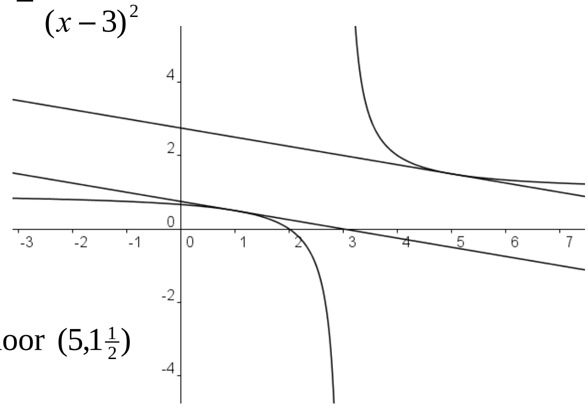
$y = \frac{1}{2} \qquad y = 1\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{4}x + b$ door $(1, \frac{1}{2})$ $\qquad y = -\frac{1}{4}x + b$ door $(5, 1\frac{1}{2})$

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + b \qquad 1\frac{1}{2} = -1\frac{1}{4} + b$

$b = \frac{3}{4} \qquad b = 2\frac{3}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \qquad y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$



b. $\frac{3}{4} < p < 2\frac{3}{4}$

Opgave 56:

a. $f'(x) = x - 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$x - 1\frac{1}{2}\sqrt{x} = 4\frac{1}{2}$

$x - 4\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$2x - 9 = 3\sqrt{x}$

$4x^2 - 36x + 81 = 9x$

$4x^2 - 45x + 81 = 0$

$x = \frac{45 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{45 \pm 27}{8}$

$x = \frac{45+27}{8} = 9 \quad \vee \quad x = \frac{45-27}{8} = 2\frac{1}{4}$ (vervalt)

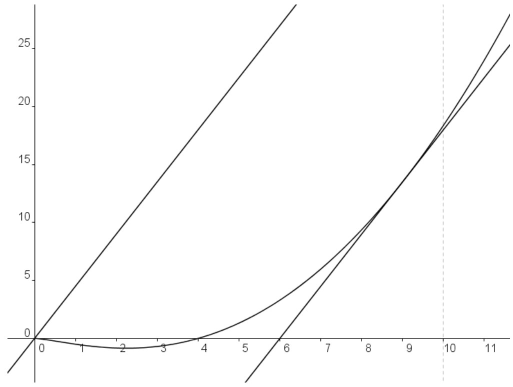
$y = 4\frac{1}{2}x + b$ door $(9, 13\frac{1}{2})$

$13\frac{1}{2} = 40\frac{1}{2} + b$

$b = -27$

$y = 4\frac{1}{2}x - 27$

b. $-27 < p \leq 0$



Opgave 57:

a. drie oplossingen
één oplossing

b. de lijn $y = ax$ gaat door $(0,0)$ en ligt tussen de x-as en lijn k. Deze lijn snijdt de grafiek van f behalve in $(0,0)$ ook nog in twee andere punten, dus de vergelijking heeft in totaal drie oplossingen.

Opgave 58:

a. $f'(x) = \frac{(x^2+5)\cdot 6 - 6x \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{6x^2 + 30 - 12x^2}{(x^2+5)^2} = \frac{-6x^2+30}{(x^2+5)^2} = 0$

$-6x^2 + 30 = 0$

$-6x^2 = -30$

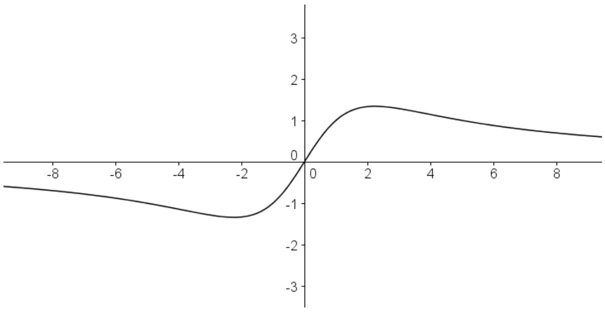
$x^2 = 5$

$x = -\sqrt{5} \quad \vee \quad x = \sqrt{5}$

min $f(-\sqrt{5}) = -\frac{3}{5}\sqrt{5}$

max $f(\sqrt{5}) = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

$B_f = [-\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{3}{5}\sqrt{5}]$



b. $f'(0) = 1\frac{1}{5}$

dus $a \geq 1\frac{1}{5} \quad \vee \quad a \leq 0$

c. $f'(x) = \frac{-6x^2+30}{(x^2+5)^2} = \frac{2}{3}$

$2(x^2+5)^2 = 3(-6x^2+30)$

$(x^2+5)^2 = 3(-3x^2+15)$

$x^4 + 10x^2 + 25 = -9x^2 + 45$

$x^4 + 19x^2 - 20 = 0$

$(x^2+20)(x^2-1) = 0$

$x^2 = -20 \quad \vee \quad x^2 = 1$

$x = 1 \quad \vee \quad x = -1$

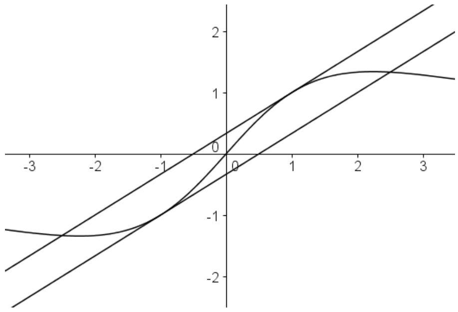
$y = 1 \qquad y = -1$

$y = \frac{2}{3}x + p$ door $(1,1)$ en $y = \frac{2}{3}x + p$ door $(-1,-1)$

$1 = \frac{2}{3} + p$ $\qquad\qquad$ $-1 = -\frac{2}{3} + p$

$p = \frac{1}{3}$ $\qquad\qquad$ $p = -\frac{1}{3}$

dus $-\frac{1}{3} < p < \frac{1}{3}$



Opgave 59:

a. $f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x-3)-(x^2-3x+6)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-5x+3-x^2+3x-6}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0$

$x^2-2x-3=0$

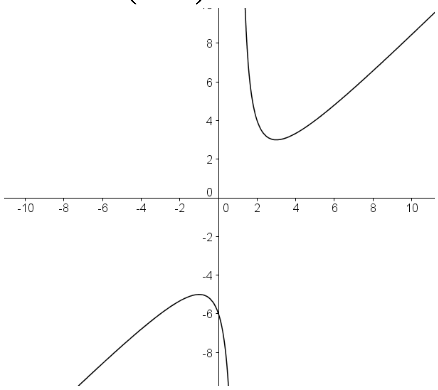
$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1 \quad \vee \quad x=3$

max $f(-1)=-5$

min $f(3)=3$

$p \leq -5 \quad \vee \quad p \geq 3$



b. $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{5}{9}$

$9(x^2-2x-3) = 5(x-1)^2$

$9x^2-18x-27 = 5x^2-10x+5$

$4x^2-8x-32=0$

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$x=-2 \quad \vee \quad x=4$

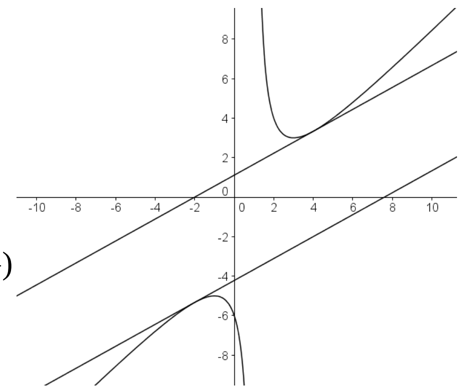
$y = -5\frac{1}{3}$ $\qquad$ $y = 3\frac{1}{3}$

$y = \frac{5}{9}x + q$ door $(-2,-5\frac{1}{3})$ $\qquad$ $y = \frac{5}{9}x + q$ door $(4,3\frac{1}{3})$

$-5\frac{1}{3} = -\frac{10}{9} + q$ $\qquad$ $3\frac{1}{3} = \frac{20}{9} + q$

$q = -\frac{38}{9}$ $\qquad$ $q = \frac{10}{9}$

dus $-\frac{38}{9} < q < \frac{10}{9}$



Opgave 60:

a. $f'(x) = 1\cdot\sqrt{2x+6} + x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2x+6}}\cdot 2 = \sqrt{2x+6} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+6}} = \dfrac{2x+6}{\sqrt{2x+6}} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+6}} =$

$= \dfrac{3x+6}{\sqrt{2x+6}} = 0$

$3x+6=0$

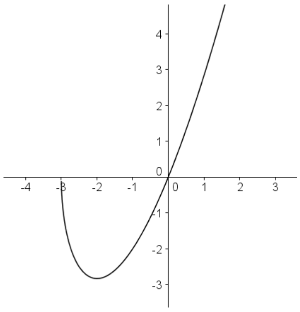
$3x=-6$

$x=-2$

top $(-2,-2\sqrt{2})$

beginpunt $(-3,0)$

dus $-2\sqrt{2} < p \leq 0$



b. $\dfrac{3x+6}{\sqrt{2x+6}} = \frac{3}{2}$

$6x + 12 = 3\sqrt{2x+6}$

$2x + 4 = \sqrt{2x+6}$

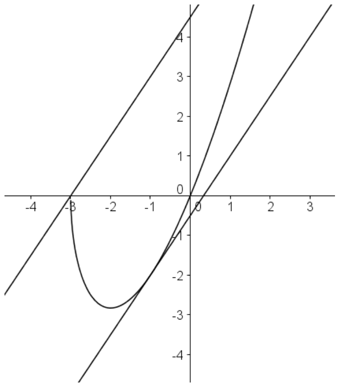
$4x^2 + 16x + 16 = 2x + 6$

$4x^2 + 14x + 10 = 0$

$x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{36}}{8} = \dfrac{-14 \pm 6}{8}$

$x = \dfrac{-14-6}{8} = -2\frac{1}{2}$ (vervalt) $\quad \vee \quad x = \dfrac{-14+6}{8} = -1$

$y = -2$



dus $y = 1\frac{1}{2}x + q$ door $(-1,-2)$

$-2 = -1\frac{1}{2} + q$

$q = -\frac{1}{2}$

de lijn door $(-3,0)$ heeft ook twee snijpunten

$y = 1\frac{1}{2}x + q$ door $(-3,0)$

$0 = -4\frac{1}{2} + q$

$q = 4\frac{1}{2}$

dus $-\frac{1}{2} < x \leq 4\frac{1}{2}$

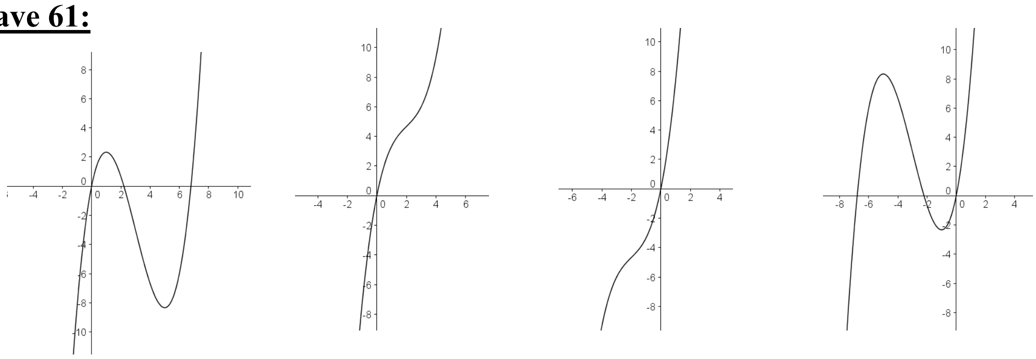
c. de lijn $y = ax$ gaat altijd door het punt $(0,0)$

$f'(0) = \sqrt{6}$

dus $0 \leq a < \sqrt{6} \quad \vee \quad a > \sqrt{6}$

Opgave 61:

a.



f_{-3} $\quad$ f_{-2} $\quad$ f_2 $\quad$ f_3

b. f_{-3} twee extreme waarden

f_{-2} geen extreme waarden

f_2 geen extreme waarden

f_3 twee extreme waarden

Opgave 62:

Voor $p > \frac{1}{2}$ geen, want dan geldt dat $D < 0$ dus geen extreme waarden.

Voor $p = \frac{1}{2}$ geen, want dan geldt $D = 0$, dan is er wel een punt waar de raaklijn horizontaal loopt, maar dit is geen extreme waarden, want de grafiek van *f* is verder overal dalend.

Opgave 63:

$f_p'(x) = -x^2 - 3x + p$

f_p heeft twee extreme waarden dus $f_p'(x) = 0$ heeft twee oplossingen

$D = 9 + 4p > 0$

$4p > -9$

$p > -2\frac{1}{4}$

Opgave 64:

$f_p'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2px + 3$

f_p heeft geen extreme waarden dus $f_p'(x) = 0$ heeft 1 of geen oplossing

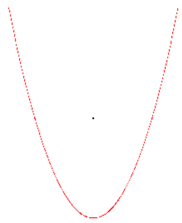
$D = 4p^2 - 9 \leq 0$

$4p^2 = 9$

$p^2 = 2\frac{1}{4}$

$p = -1\frac{1}{2} \quad \vee \quad p = 1\frac{1}{2}$

$-1\frac{1}{2} \leq p \leq 1\frac{1}{2}$



Opgave 65:

a. $f_p'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + p$

$f_p'(1) = \frac{1}{4} + 2 + p = 0$

$p = -2\frac{1}{4}$

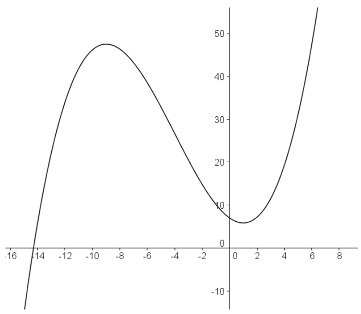
$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 2\frac{1}{4} = 0$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0$

$x = -9 \quad \vee \quad x = 1$

max $f(-9) = 47\frac{1}{2}$



b. f_p heeft twee extreme waarden, dus $f_p'(x) = 0$ heeft twee oplossingen, dus $D > 0$

$D = 4 - p > 0$

$-p > -4$

$p < 4$

Opgave 66:

a. $f'(x)$ geeft de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, dus $f_p'(3) = 2$

b. $f_p'(x) = 9 + 6p + 5 = 2$

$6p = -12$

$p = -2$

Opgave 67:

a. $f_p'(x) = 9\sqrt{x} + 2px$

$f_p'(2\tfrac{1}{4}) = 13\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}p = 0$

$4\tfrac{1}{2}p = -13\tfrac{1}{2}$

$p = -3$

b. $f_p'(1) = 9 + 2p = 5$

$2p = -4$

$p = -2$

$f_{-2}(x) = 6x\sqrt{x} - 2x^2$

$f_{-2}'(1) = 4$

$y = 5x + q$ door $(1,4)$

$4 = 5 + q$

$q = -1$

Opgave 68:

a. snijpunt met de y-as: $(0,4)$

$f_p(0) = \dfrac{p}{1} = p = 4$

$p = 4$

$f_4(x) = \dfrac{4x+4}{x^2+1}$

$f_4'(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot 4 - (4x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^2+4-8x^2-8x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4x^2-8x+4}{(x^2+1)^2}$

$f_4'(0) = 4 = a$ dus $a = 4$

b. $f_p'(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot 4 - (4x+p)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^2+4-8x^2-2px}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4x^2+4-2px}{(x^2+1)^2}$

$f_p'(-1) = \dfrac{2p}{4} = \tfrac{1}{2}p = -1$

$p = -2$

$f_{-2}(x) = \dfrac{4x-2}{x^2+1}$

$f_{-2}(-1) = -3$

$y = -x + b$ door $(-1,-3)$

$-3 = 1 + b$

$b = -4$

$y = -x - 4$

c. $f_p'(x) = \dfrac{-12-4p}{25} = 0$

$-12 - 4p = 0$

$-4p = 12$

$p = -3$

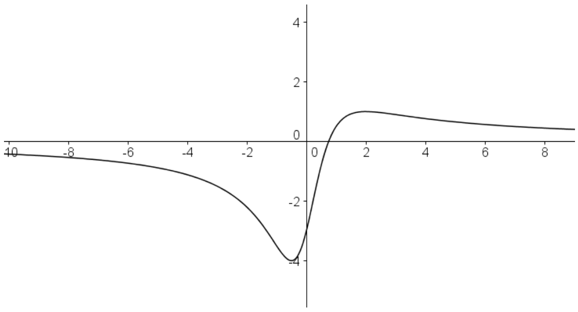
$f'_{-3}(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2} = 0$

$-4x^2 + 6x + 4 = 0$

$x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{100}}{-8} = \dfrac{-6 \pm 10}{-8}$

$x = \frac{-6-10}{-8} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{-6+10}{-8} = -\frac{1}{2}$

min $f_{-3}(-\frac{1}{2}) = -4$



Opgave 69:

a. $f'_p(x) = x^2 + 2px - 3 = 0$

$D = 4p^2 + 12 > 0$ voor iedere waarde van p, dus $f'_p(x) = 0$ heeft altijd twee oplossingen, dus f_p heeft twee extreme waarden.

b. $f'_p(3) = 9 + 6p - 3 = 0$

$6p = -6$

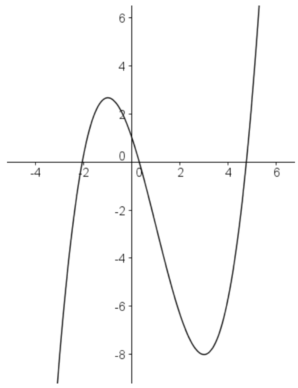
$p = -1$

$f'_{-1}(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1 \quad \vee \quad x = 3$

max $f_{-1}(-1) = 2\frac{2}{3}$



c. $f'_p(-2) = 4 - 4p - 3 = -1$

$-4p = -2$

$p = \frac{1}{2}$

$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}$

$f_{\frac{1}{2}}(-2) = 4\frac{5}{6}$

$y = -x + q$ door $(-2, 4\frac{5}{6})$

$4\frac{5}{6} = 2 + q$

$q = 2\frac{5}{6}$

Opgave 70:

$$f'_p(x) = \frac{(x^2+2)\cdot 9 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+p}} \cdot 2x - 9\sqrt{x^2+p}\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{\dfrac{9x(x^2+2)}{\sqrt{x^2+p}} - 18x\sqrt{x^2+p}}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{9x(x^2+2)}{\sqrt{x^2+p}} - \dfrac{18x(x^2+p)}{\sqrt{x^2+p}}}{(x^2+2)^2} = \frac{\dfrac{9x^3 + 18x - 18x^3 - 18px}{\sqrt{x^2+p}}}{(x^2+2)^2} = \frac{-9x^3 + 18x - 18px}{\sqrt{x^2+p}\cdot(x^2+2)^2}$$

$$f'_p(-1) = \frac{-9 + 18p}{\sqrt{1+p}\cdot 9} = \frac{-1+2p}{\sqrt{1+p}} = 2\tfrac{1}{2}$$

$2\frac{1}{2}\sqrt{1+p} = -1 + 2p$

$5\sqrt{1+p} = -2 + 4p$

$25(1+p)=4-16p+16p^2$

$25+25p=4-16p+16p^2$

$-16p^2+41p+21=0$

$p=\dfrac{-41\pm\sqrt{3025}}{-32}=\dfrac{-41\pm 55}{-32}$

$p=\frac{-41-55}{-32}=3 \quad\vee\quad p=\frac{-41+55}{-32}=-\frac{7}{16}$ (vervalt)

$f_3(x)=\dfrac{9\sqrt{x^2+3}}{x^2+2}$

$f_3(-1)=6$

$y=2\frac{1}{2}x+b$ door $(-1,6)$

$6=-2\frac{1}{2}+b$

$b=8\frac{1}{2}$

$y=2\frac{1}{2}x+8\frac{1}{2}$