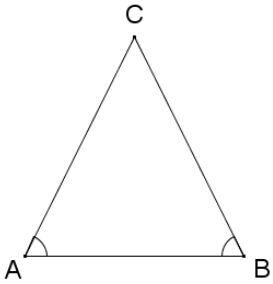
## 8.2 Stellingen bewijzen

**Opgave 13:**




$$\left.\begin{aligned} \angle A &= \angle B \\ \angle B &= \angle A \\ \angle C &= \angle C \end{aligned}\right\} \quad \Delta ABC \cong \Delta BAC$$

dus $AC = BC$

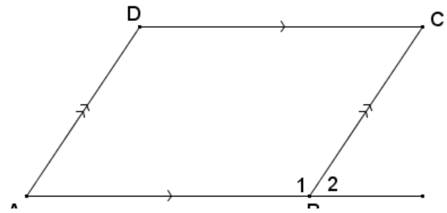
**Opgave 14:**

$$\left.\begin{aligned} \angle A_1 + \angle A_2 &= 180^\circ \\ \angle A_3 + \angle A_2 &= 180^\circ \end{aligned}\right\} \quad \angle A_1 + \angle A_2 = \angle A_3 + \angle A_2$$

dus $\angle A_1 = \angle A_2$

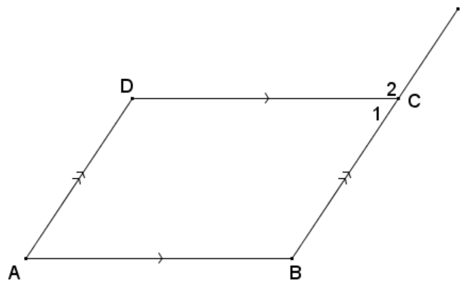
**Opgave 15:**

Gegeven: vierhoek $ABCD$ met $AB \,//\, CD$ en $AD \,//\, BC$
Te bewijzen: $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$
Bewijs:
Verleng zijde $AB$ aan de kant van $B$.



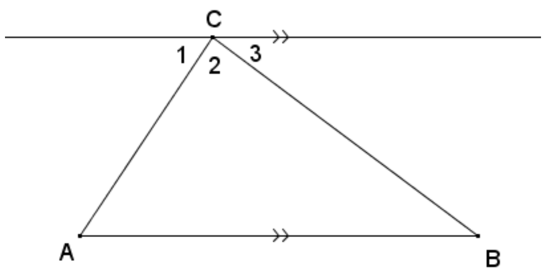

$$\left.\begin{aligned} \angle A &= \angle B_2 \ (F - hoeken) \\ \angle C &= \angle B_2 \ (Z - hoeken) \end{aligned}\right\} \quad \angle A = \angle C$$

Verleng zijde $BC$ aan de kant van $C$.




$$\left.\begin{aligned} \angle B &= \angle C_2 \ (F - hoeken) \\ \angle D &= \angle C_2 \ (Z - hoeken) \end{aligned}\right\} \quad \angle B = \angle D$$

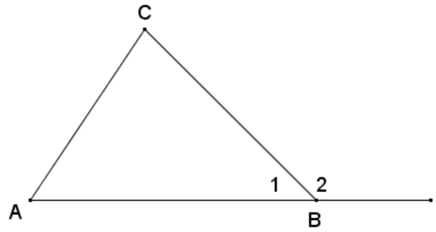
**Opgave 16:**




Gegeven: $\Delta ABC$
Te bewijzen: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
Bewijs:
Teken lijn $k$ door $C$ evenwijdig met $AB$.

$$\left.\begin{aligned} \angle C_1 &= \angle A \ (Z - hoeken) \\ \angle C_2 &= \angle C \\ \angle C_3 &= \angle B \ (Z - hoeken) \\ \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 &= 180^\circ \ (gestrekte\ hoek) \end{aligned}\right\} \quad \text{dus } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

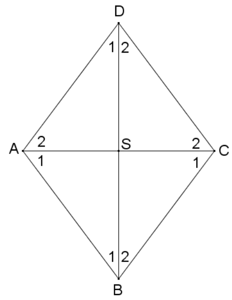
**Opgave 17:**




Gegeven: $\Delta ABC$ met de buitenhoek bij $B$.
Te bewijzen: $\angle B_2 = \angle A + \angle C$
Bewijs:
$\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180^\circ$ (som van hoeken in driehoek)
$\angle B_1 = 180^\circ - \angle A - \angle C$

$\angle B_1 + \angle B_2 = 180°$ (gestrekte hoek)
$\angle B_2 = 180° - \angle B_1 = 180° - (180° - \angle A - \angle C) = 180° - 180° + \angle A + \angle C = \angle A + \angle C$

**Opgave 18:**



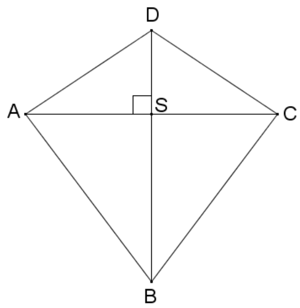

a. opgave 10a
b. opgave 8
c. Gegeven: ruit $ABCD$
Te bewijzen: $AC \perp BD$
Bewijs:
Punt $S$ is het snijpunt van $AC$ en $BD$
$AS = CS$ en $BS = DS$ (zie opgave 8)

$$\left.\begin{array}{l} AS = CS \\ DS = DS \\ AD = CD \end{array}\right\} \quad \Delta ASD \cong \Delta CSD$$

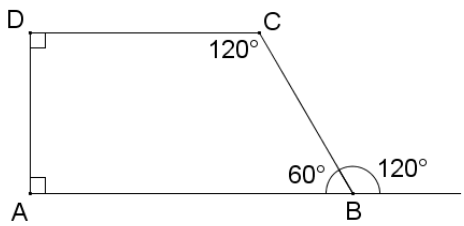
$$\left.\begin{array}{l} \angle ASD = \angle CSD \\ \angle ASD + \angle CSD = 180° \ (\textit{gestrekte hoek}) \end{array}\right\} \quad \angle ASD = \angle CSD = 90°$$

dus $AC \perp DS$ dus $AC \perp BD$

**Opgave 19:**



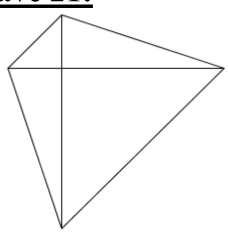

**Opgave 20:**




$\frac{1}{3}(\angle A + \angle C + \angle D) = \frac{1}{3}(90° + 120° + 90°) = 100°$
$\angle B_2 = 120° \neq \frac{1}{3}(\angle A + \angle C + \angle D)$

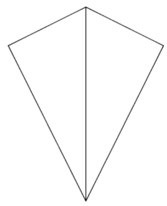
**Opgave 21:**

a.

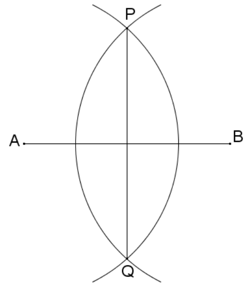


b. als in een vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, dan is de vierhoek een parallellogram.
c. als in $\Delta ABC$ geldt: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , dan is $\angle A = 90°$

d.

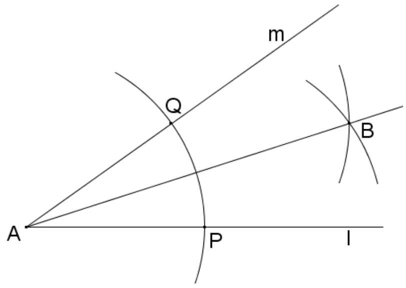


**Opgave 22:**



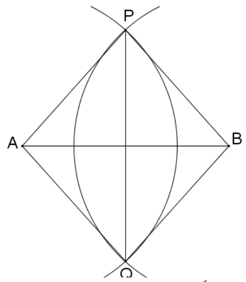

Teken de cirkel $c_1$ met middelpunt *A* en straal *r*.
Teken de cirkel $c_2$ met middelpunt *B* en straal *r*.
De cirkels $c_1$ en $c_2$ snijden elkaar in de punten *P* en *Q*.
*PQ* is de middelloodlijn van *AB*.

**Opgave 23:**

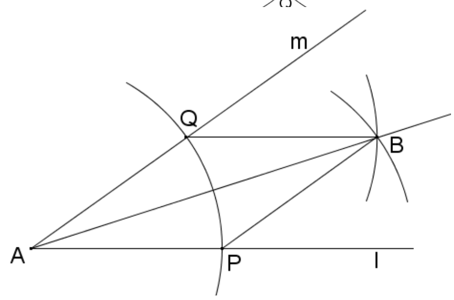



Teken de cirkel $c_1$ met middelpunt *A* en straal *r*.
$c_1$ snijdt de lijnen *l* en *m* in de punten *P* en *Q*.
Teken de cirkel $c_2$ met middelpunt *P* en straal *r*.
Teken de cirkel $c_3$ met middelpunt *Q* en straal *r*.
Punt *B* is het snijpunt van $c_2$ en $c_3$.
*AB* is de bissectrice van $\angle A$.

**Opgave 24:**

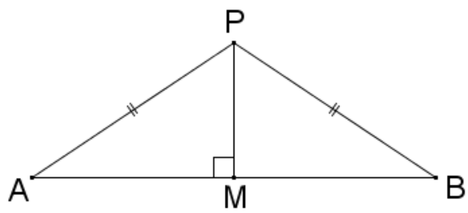



a. $AP = BP = BQ = AQ$ dus vierhoek *APBQ* is een ruit.
In een ruit delen de diagonalen elkaar loodrecht middendoor (zie opgave 8), dus *PQ* is de middelloodlijn van *AB*.




b. $AP = BP = BQ = AQ$ dus *APBQ* is een ruit.
In een ruit delen de diagonalen de hoeken middendoor (zie opgave 9), dus *AB* is de bissectrice van $\angle A$.

**Opgave 25:**

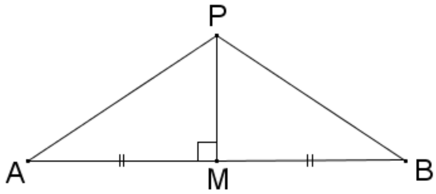



Gegeven: De punten *A* , *B* en *P* met $AP = BP$.
Te bewijzen: *P* ligt op de middelloodlijn van *AB*.
Bewijs:
Teken de loodlijn vanuit punt *P* op *AB* , deze snijdt *AB* in punt *M*.

$$\left.\begin{array}{r} AP = BP \\ PM = PM \\ \angle AMP = \angle BMP = 90^\circ \end{array}\right\} \quad \Delta APM \cong BPM \quad (zzr)$$

dus $AM = BM$
dus $PM$ is de middelloodlijn van $AB$, dus $P$ ligt op de middelloodlijn van $AB$.

b. Elk punt van de middelloodlijn van $AB$ heeft gelijke afstanden tot $A$ en $B$.



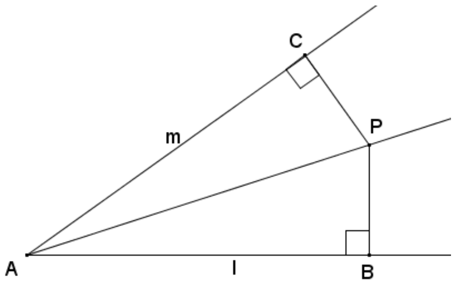

Gegeven: lijnstuk $AB$ en de middelloodlijn $PM$.
Te bewijzen: $AP = BP$
Bewijs:

$$\left.\begin{aligned} AM &= BM \\ \angle AMP &= \angle BMP \\ PM &= PM \end{aligned}\right\} \quad \Delta AMP \cong \Delta BMP \quad (zhz)$$

dus $AP = BP$

**Opgave 26:**

a. Gegeven: de lijnen $l$ en $m$ zij de bene van $\angle A$.
Punt $P$ met $d(P,l) = d(P,m)$ dus $BP = CP$
Te bewijzen: $P$ ligt op de bissectrice van $\angle A$.
Bewijs:




$$\left.\begin{aligned} AP &= AP \\ BP &= CP \\ \angle ABP = \angle ACP &= 90^\circ \end{aligned}\right\} \quad \Delta ACP \cong \Delta ABP \quad (zzr)$$

dus $\angle BAP = \angle CAP$
dus punt $P$ ligt op de bissectrice van $\angle A$.

b. Elk punt van de bissectrice van $\angle A$ heeft gelijke afstanden tot de benen van die hoek.

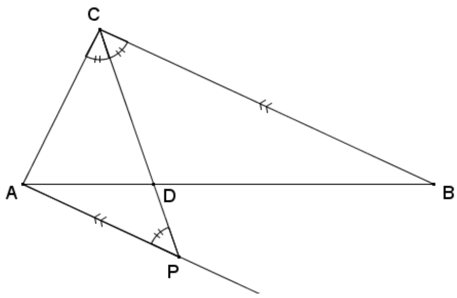
Gegeven: $\angle A$ met de benen $l$ en $m$ en de bissectrice van $\angle A$.
Punt $P$ is een punt van de bissectrice van $\angle A$.
Te bewijzen: $d(P,l) = d(P,m)$

Bewijs: $$\left.\begin{aligned} AP &= AP \\ \angle PAB &= \angle PAC \\ \angle ABP &= \angle ACP \end{aligned}\right\} \quad \Delta ABP \cong \Delta ACP \quad (zhh)$$

dus $BP = CP$
dus $d(P,l) = d(P,m)$

**Opgave 27:**

Gegeven: $\Delta ABC$ met bissectrice $CD$.
Te bewijzen: $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$
Bewijs:
Teken door $A$ de lijn $l$ evenwijdig met $BC$.
$CD$ snijdt lijn $l$ in punt $P$




$$\left.\begin{aligned} &\angle BCD = \angle ACP \\ &\angle APC = \angle PCB \; (Z-hoeken) \end{aligned}\right\} \quad \angle ACP = \angle APC$$

dus $\Delta ACP$ is gelijkbenig
dus $AC = AP$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ADP = \angle BDC \ (overstaande\ hoeken) \\ \angle APD = \angle BCD \ (Z-hoeken)\end{array}\right\} \quad \Delta ADP \sim \Delta BDC \quad (hh)$$

dus $\frac{AD}{BD} = \frac{AP}{BC}$

$AP = AC$ dus $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$

**Opgave 28:**

a. $\cos 30° = \frac{5}{AS}$

$$AS = \frac{5}{\cos 30°} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 3\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

b. bereken $CS$ met behulp van de cosinusregel

$$\begin{aligned} CS^2 &= AS^2 + AC^2 - 2 \cdot AS \cdot AC \cdot \cos\angle A \\ &= (3\tfrac{1}{3}\sqrt{3})^2 + 7^2 - 2 \cdot 3\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \cdot 7 \cdot \cos 30° \\ &= 33\tfrac{1}{3} + 49 - 2 \cdot 3\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \cdot 7 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= 33\tfrac{1}{3} + 49 - 70 = 12\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$AS^2 + CS^2 = 33\tfrac{1}{3} + 12\tfrac{1}{3} = 45\tfrac{2}{3} \neq AC^2$ dus $\angle ASC \neq 90°$

**Opgave 29:**

$$\left.\begin{array}{l}\angle FBE = \angle BDC \\ \angle BFE = \angle BDC\end{array}\right\} \quad \Delta BEF \sim \Delta BCD \quad (hh)$$

dus $\frac{EF}{CD} = \frac{BE}{BC}$

$\frac{2}{CD} = \frac{3}{6}$

$CD = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4$

$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

$AB = AD + BD = 3 + 2\sqrt{5}$

**Opgave 30:**

a. teken de hoogtelijn $CE$

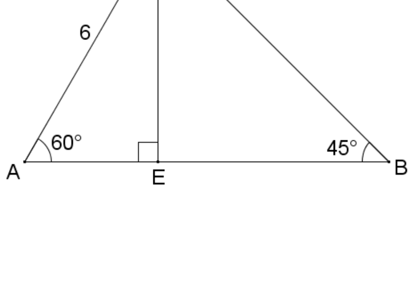
$\cos 60° = \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{6}$

$AE = 6\cos 60° = 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 3$

$CE = 6\sin 60° = 6 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\Delta BEC$ is een geo-driehoek dus $BE = CE = 3\sqrt{3}$

$AB = AE + BE = 3 + 3\sqrt{3}$



b. $BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{27+27} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

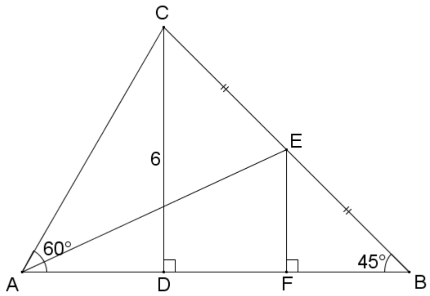
$\cos 45° = \dfrac{BD}{AB}$

$BD = AB \cdot \cos 45° = (3 + 3\sqrt{3}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{6}$

$CD = BC - CD = 3\sqrt{6} - (1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{6}) = 3\sqrt{6} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{6} = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{6} = 1{,}55$

**Opgave 31:**

Teken de loodlijn $EF$ op $AB$




$\left.\begin{array}{l}\angle FBE = \angle DBC \\ \angle BFE = \angle BDC\end{array}\right\} \quad \Delta BEF \infty \Delta BCD \quad (hh)$

$\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{EF}{CD}$

$\dfrac{BE}{2BE} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{EF}{6}$

$EF = \dfrac{6 \cdot 1}{2} = 3$

$\left.\begin{array}{l}BF = EF = 3 \\ BD = CD = 6\end{array}\right\} \quad DF = 3$

$\tan 60° = \dfrac{CD}{AD}$

$AD = \dfrac{CD}{\tan 60°} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$\tan \angle EAB = \dfrac{EF}{AF} = \dfrac{3}{2\sqrt{3} + 3}$

$\angle EAB = 25°$

**Opgave 32:**

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

$\left.\begin{array}{l}\angle EBD = \angle ABC \\ \angle BDE = \angle BCA \ (Z - hoeken)\end{array}\right\} \quad \Delta BED \infty \Delta BAC$

$\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BD}{BC}$

$\dfrac{BE}{13} = \dfrac{6}{12}$

$BE = \dfrac{6 \cdot 13}{12} = 6\tfrac{1}{2}$

$AE = AB - BE = 13 - 6\tfrac{1}{2} = 6\tfrac{1}{2}$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$

$\tan \angle B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{12}$

$\angle B = 22{,}6°$

$$\tan \angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{6}{5}$$
$$\angle CAD = 50{,}2°$$
$$\angle BAD = 180° - \angle B - \angle C - \angle CAD = 180° - 22{,}6° - 90° - 50{,}2° = 17°$$