

8.4 Het bewijzen van vermoedens

Opgave 47:

- a.
$$\left. \begin{array}{l} A = B \\ B = C \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A = C \\ C = D \end{array} \right\} A = D$$
- b.
$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \\ \angle A + \angle D = 180^\circ \end{array} \right\} \angle B + \angle C = \angle D$$

Opgave 48:

- a. AD en BE snijden elkaar in T
- $$\left. \begin{array}{l} AC = 2 \cdot EC \\ BC = 2 \cdot DC \\ \angle C = \angle C \end{array} \right\} \Delta ABC \sim \Delta EDC \text{ (zhz)}$$
- $AC : EC = 2 : 1$ dus ook $AB : ED = 2 : 1$
uit de gelijkvormigheid volgt ook $\angle A_{12} = \angle E_1$
dus $AB \parallel ED$ (F-hoeken)
- $$\left. \begin{array}{l} \angle B_1 = \angle E_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ATB = \angle DTE \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Delta ABT \sim \Delta DET \text{ (hh)}$$
- omdat $AB : DE = 2 : 1$ is ook $AT : DT = 2 : 1$
- b. $AS : SD = 2 : 1$
 $CS : SF = 2 : 1$
zo ook $BT : TE = 2 : 1$ waarbij punt $T =$ punt $S =$ zwaartepunt

Opgave 49:

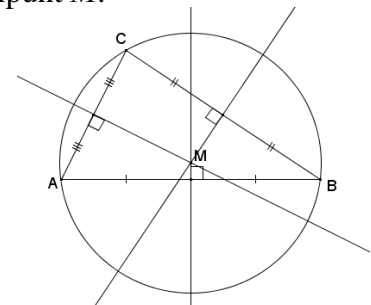
- a. Gegeven: ΔABC met de drie middelloodlijnen van de zijden
Te bewijzen: de drie middelloodlijnen van de zijden van ΔABC gaan door één punt
- b. Bewijs:
 M is het snijpunt van m_{AB} en m_{AC}
- $$\left. \begin{array}{l} M \text{ op } m_{AB}, \text{ dus } AM = BM \\ M \text{ op } m_{AC}, \text{ dus } AM = CM \end{array} \right\} BM = CM$$
- omdat $BM = CM$ ligt M op m_{BC}
- Hiermee is bewezen dat de drie middelloodlijnen van de zijden van een driehoek door één punt gaan.

Opgave 50:

Gegeven: ΔABC en de omschreven cirkel van ΔABC met middelpunt M .
Te bewijzen: M is het snijpunt van de middelloodlijnen van ΔABC .

- Bewijs: $AM = BM$ (straal cirkel), dus M op m_{AB} (1)
 $AM = CM$ (straal cirkel), dus M op m_{AC} (2)
 $BM = CM$ (straal cirkel), dus M op m_{BC} (3)

Uit (1), (2) en (3) volgt dat M het snijpunt is van de middelloodlijnen van ΔABC .



Opgave 51:

Gegeven: $\triangle ABC$ met bissectrices k, l en m

Te bewijzen: k, l en m gaan door één punt

Bewijs:

k en l snijden elkaar in N

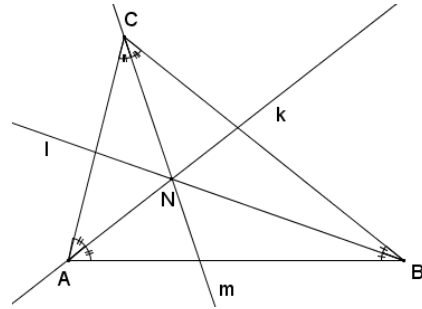
N op k dus $d(N, AB) = d(N, AC)$ (1)

N op l dus $d(N, AB) = d(N, BC)$ (2)

uit (1) en (2) volgt: $d(N, AC) = d(N, BC)$

dus N ligt op m

dus N ligt op de bissectrice van $\angle C$ en dus gaan de drie bissectrices door één punt



Opgave 52:

Gegeven: $\triangle ABC$ met de ingeschreven cirkel met middelpunt N

Te bewijzen: N is het snijpunt van de bissectrices van $\triangle ABC$

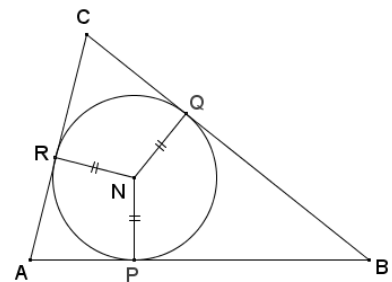
Bewijs:

$PN = RN$ (straal cirkel) dus N op de bissectrice van $\angle A$

$PN = QN$ (straal cirkel) dus N op de bissectrice van $\angle B$

$QN = RN$ (straal cirkel) dus N op de bissectrice van $\angle C$

Dus N is het snijpunt van de bissectrices van $\triangle ABC$



Opgave 53:

Gegeven: $\triangle ABC$ met de aangeschreven cirkel van zijde

BC met middelpunt N

N is het snijpunt van de buitenbissectrices van

$\angle B$ en $\angle C$

Te bewijzen: de bissectrice van $\angle A$ en de buitenbissectrices van $\angle B$ en $\angle C$ gaan door één punt

Bewijs:

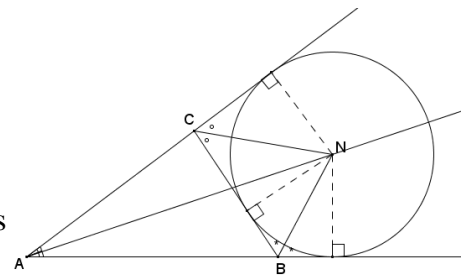
N op de buitenbissectrice van $\angle B$ dus $d(N, AB) = d(N, BC)$ (1)

N op de buitenbissectrice van $\angle C$ dus $d(N, AC) = d(N, BC)$ (2)

Uit (1) en (2) volgt: $d(N, AB) = d(N, AC)$

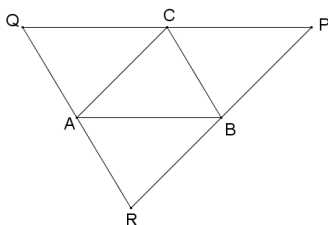
Dus N op de bissectrice van $\angle A$

Dus N is het snijpunt van de bissectrice van $\angle A$ en de buitenbissectrices van $\angle B$ en $\angle C$



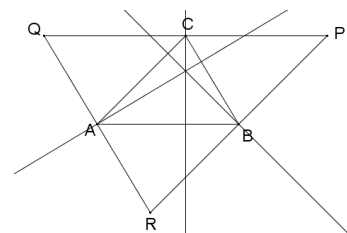
Opgave 54:

a.



b. de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ zijn de middelloodlijnen van $\triangle PQR$.

In opgave 49 hebben we bewezen dat de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan, dus de drie hoogtelijnen van een driehoek gaan ook door één punt.



Opgave 55:

- a. Gegeven: $\triangle ABC$ met $\angle C = 90^\circ$ en M is het midden van AB

Te bewijzen: $AM = BM = CM$

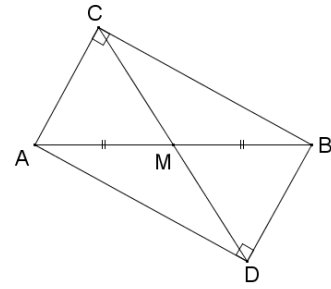
Bewijs:

Kies punt D zo, dat vierhoek $ADBC$ een rechthoek is.

In een rechthoek verdelen de twee diagonalen elkaar middendoor.

Dus $AM = BM = CM$

Dus als $\triangle ABC$ rechthoekig is in C dan ligt C op de cirkel met middellijn AB .



- b. Gegeven: cirkel met middellijn AB en punt C op de cirkel

Te bewijzen: $\angle C = 90^\circ$

Bewijs:

$AM = CM$ dus $\triangle ACM$ is gelijkbenig, dus $\angle A = \angle ACM$

$BM = CM$ dus $\triangle BCM$ is gelijkbenig, dus $\angle B = \angle BCM$

In $\triangle ABC$ geldt: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

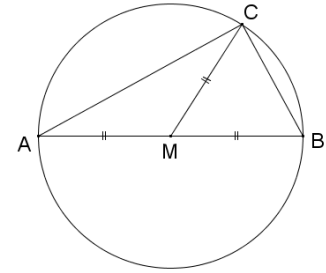
Dus $\angle A + \angle B + \angle ACM + \angle BCM = 180^\circ$

Dus $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACM + \angle BCM = 180^\circ$

Dus $2 \cdot (\angle ACM + \angle BCM) = 180^\circ$

Dus $\angle ACM + \angle BCM = 90^\circ$

Dus $\angle C = 90^\circ$



Opgave 56:

Gegeven: vierhoek $ABCD$

Te bewijzen: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

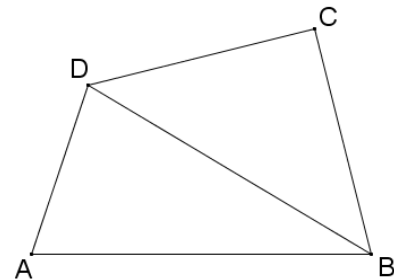
Bewijs:

In $\triangle ABD$ geldt: $\angle A + \angle ABD + \angle ADB = 180^\circ$

In $\triangle BCD$ geldt: $\angle CBD + \angle C + \angle BDC = 180^\circ$

Dus $\angle A + \angle ABD + \angle ADB + \angle CBD + \angle C + \angle BDC = 360^\circ$

Dus $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$



Opgave 57:

- a. Gegeven: vierhoek $ABCD$ met de hoekpunten op een cirkel waarvan het middelpunt M binnen de vierhoek ligt

Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Bewijs:

Teken de lijnstukken MA , MB , MC en MD .

In $\triangle ABM$ is $\angle A_2 = \angle B_1$ (gelijkbenige driehoek)

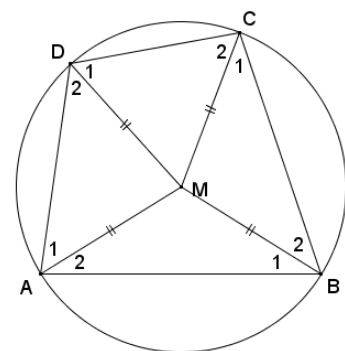
In $\triangle BCM$ is $\angle B_2 = \angle C_1$ (gelijkbenige driehoek)

In $\triangle CDM$ is $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)

In $\triangle ADM$ is $\angle D_2 = \angle A_1$ (gelijkbenige driehoek)

Dus $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2$

Ofwel $\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle C = \angle B + \angle D \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle A + \angle C = 180^\circ \text{ en} \\ \angle B + \angle D = 180^\circ \end{array}$



- b. Gegeven: vierhoek $ABCD$ met de hoekpunten op een cirkel, waarvan het middelpunt M buiten de vierhoek ligt.

Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Bewijs:

Teken de lijnstukken MA , MB , MC en MD .

In $\triangle ADM$ geldt: $\angle A_{12} = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)

In $\triangle CDM$ geldt: $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)

In $\triangle BCM$ geldt: $\angle B_{12} = \angle C_1$ (gelijkbenige driehoek)

In $\triangle ABM$ geldt: $\angle B_1 = \angle A_2$ (gelijkbenige driehoek)

Dus $\angle A_{12} + \angle C_2 + \angle C_1 - \angle A_2 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B_{12} - \angle B_1$

$$\angle A_1 + \angle C_{12} = \angle B_2 + \angle D_{12}$$

Ofwel: $\left. \begin{array}{l} \angle A_1 + \angle B_2 + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle A_1 + \angle C_{12} = \angle B_2 + \angle D_{12} \end{array} \right\} \text{ dus}$

$\angle A_1 + \angle C_{12} = 180^\circ$ en $\angle B_2 + \angle D_{12} = 180^\circ$

- c. Gegeven: vierhoek $ABCD$ met de hoekpunten op een cirkel, waarvan het middelpunt M op zijde AB ligt

Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Bewijs:

Teken de lijnstukken CM en DM

In $\triangle ADM$ geldt: $\angle A = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)

In $\triangle CDM$ geldt: $\angle C_2 = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)

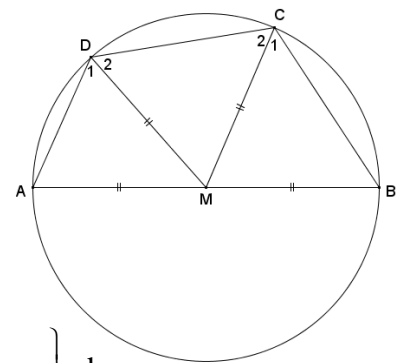
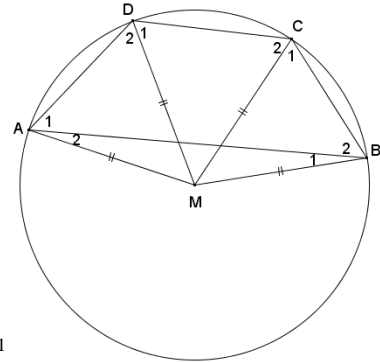
In $\triangle BCM$ geldt: $\angle C_1 = \angle B$ (gelijkbenige driehoek)

Dus $\angle A + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle D_1 + \angle B + \angle D_2$

$$\angle A + \angle C_{12} = \angle B + \angle D_{12}$$

Ofwel: $\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle A + \angle C_{12} = \angle B + \angle D_{12} \end{array} \right\} \text{ dus}$

$\angle A + \angle C_{12} = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D_{12} = 180^\circ$



Opgave 58:

Gegeven: de cirkel door de punten A , B en D en een punt C buiten de cirkel

Te bewijzen: $\angle A + \angle C < 180^\circ$

Bewijs:

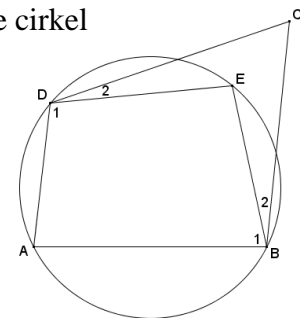
Kies een punt E op de cirkel binnen vierhoek $ABCD$ en teken BE en DE

$\angle B_1 + \angle D_1 = 180^\circ$ (koordenvierhoek)

$$\angle B_{12} + \angle D_{12} > 180^\circ$$

$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B_{12} + \angle C + \angle D_{12} = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle B_{12} + \angle D_{12} > 180^\circ \end{array} \right\} \text{ dus}$

$\angle A + \angle C < 180^\circ$



Opgave 59:

Gegeven: twee cirkels die elkaar snijden in de punten A en B

lijn k gaat door A en snijdt de cirkels in C en D

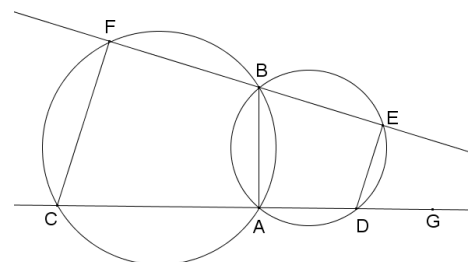
lijn l gaat door B en snijdt de cirkels in E en F

Te bewijzen: $CF \parallel DE$

Bewijs:

$ABFC$ is een koordenvierhoek dus $\angle C + \angle ABF = 180^\circ$

$\angle ABF + \angle ABE = 180^\circ$ (gestrekte hoek)



Dus $\angle C = \angle ABE$ (1)

$ADEB$ is een koordenvierhoek dus $\angle ADG + \angle ABE = 180^\circ$

$\angle ADG + \angle GDE = 180^\circ$ (gestrekte hoek)

Dus $\angle ABE = \angle GDE$ (2)

Uit (1) en (2) volgt $\angle C = \angle GDE$ dus $CF \parallel DE$ (F-hoek)

Opgave 60:

De bewering is waar.

Gegeven: twee cirkels die elkaar snijden in de punten A en B

lijn k gaat door A en snijdt de cirkels in C en D

lijn l gaat door B en snijdt de cirkels in E en F ,

waarbij E tussen A en D ligt.

Te bewijzen: $CF \parallel DE$

Bewijs:

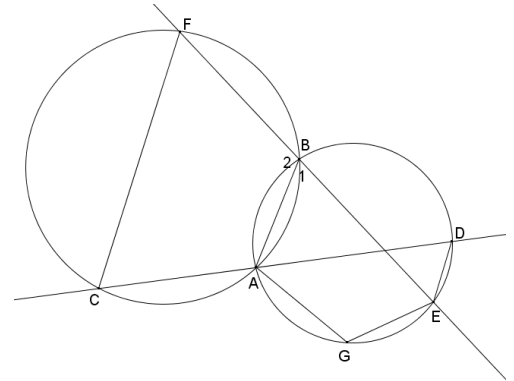
Teken punt G op de kleinste boog AE en teken de

lijnstukken CF, AB, DE, AG en EG .

$$\left. \begin{array}{l} \angle C + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle C_1 = \angle B_1 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_1 + \angle G = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle D + \angle G = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \end{array} \right\} \angle B_1 = \angle D \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $\angle C = \angle D$ dus $CF \parallel DE$ (z-hoeken)



Opgave 61:

a. Gegeven: $\triangle ABC$ met punt E op BC en punt D

op AC zo, dat $\angle CED = \angle A$

Te bewijzen: $ABED$ is een koordenvierhoek.

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} \angle BED + \angle CED = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \\ \angle A = \angle CED \end{array} \right\} \text{dus}$$

$$\angle A + \angle BED = 180^\circ$$

dus $ABED$ is een koordenvierhoek

b. Gegeven: $\triangle PQR$ met de hoogtelijnen PS en QT

Te bewijzen: ST is antiparallel met PQ

$$\text{ofwel } \angle P = \angle RST$$

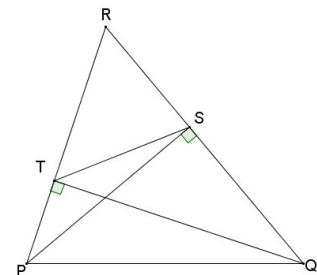
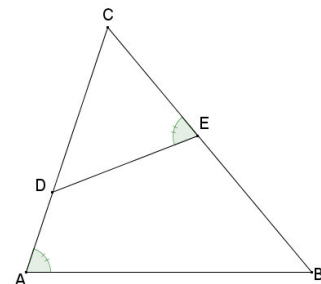
Bewijs:

$\angle PSQ = 90^\circ$ en $\angle PTQ = 90^\circ$ dus volgens de omkering van de stelling van Thales liggen S en T op een cirkel met middellijn PQ .

Dus $PQST$ is een koordenvierhoek.

$$\left. \begin{array}{l} \angle P + \angle QST = 180^\circ \\ \angle QST + \angle RST = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \text{dus } \angle P = \angle RST$$

Dus ST is antiparallel met PQ .



Opgave 62:

Gegeven: $\triangle ABC$ met punt P op AB , punt Q op BC en punt R op AC

cirkel c_1 gaat door A, P en R

cirkel c_2 gaat door B, P en Q

cirkel c_3 gaat door C, Q en R

Te bewijzen: c_1, c_2 en c_3 gaan door één punt

Bewijs:

S is het snijpunt van c_1 en c_2

$APSR$ is een koordenvierhoek dus $\angle A + \angle S_1 = 180^\circ$

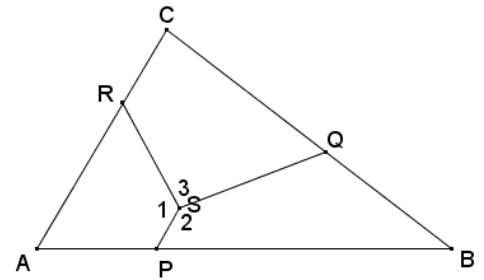
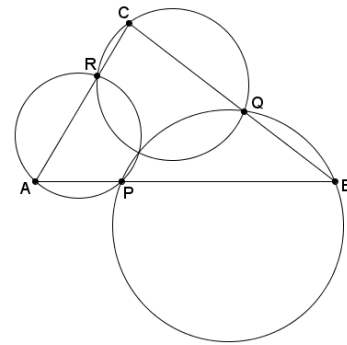
$BQSP$ is een koordenvierhoek dus $\angle B + \angle S_2 = 180^\circ$

Hieruit volgt dat $\angle A + \angle B + \angle S_1 + \angle S_2 = 360^\circ$ (1)

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle S_1 + \angle S_2 + \angle S_3 = 180^\circ + 360^\circ = 540^\circ$ (2)

Uit (1) en (2) volgt $\angle C + \angle S_3 = 180^\circ$

Dus $CRSQ$ is een koordenvierhoek, dus S ligt op c_3



Opgave 63:

Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de bissectrices van de hoeken die elkaar snijden in de punten E, F, G en H .

Te bewijzen: $EFGH$ is een koordenvierhoek

Bewijs:

$\angle H_3 = \angle H_1 = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle D_1)$

$\angle F_3 = \angle F_1 = 180^\circ - (\angle B_1 + \angle C_1)$

dus $\angle F_3 + \angle H_3 = 360^\circ - (\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1)$

$\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = \frac{1}{2} \cdot (\angle A_{12} + \angle B_{12} + \angle C_{12} + \angle D_{12})$
 $= \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$

dus $\angle F_3 + \angle H_3 = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

dus $EFGH$ is een koordenvierhoek

