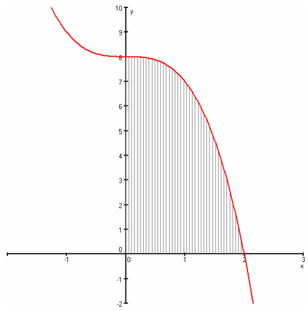
Hoofdstuk 10: Integraalrekening

10.1 Riemannsommen en integralen

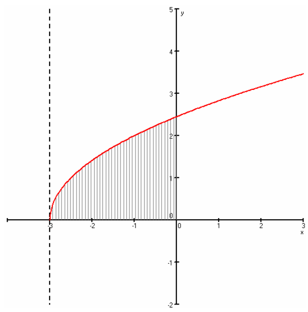
Opgave 1:
Benadering b is de beste.
Bij a liggen alle rechthoekjes onder de grafiek, dus je benadering is zeker te laag.
Bij c liggen alle rechthoekjes boven de grafiek, dus je benadering is zeker te hoog.
Bij b heffen de blauwe stukjes boven de grafiek en de witte stukjes onder de grafiek elkaar bij benadering op.

Opgave 2:
De grafiek daalt op het interval $[0,2]$ dus moet je voor de ondersom de rechter grenzen nemen om te zorgen dat de rechthoekjes onder de grafiek liggen.
Voor de bovensom moet je de linker grenzen nemen.

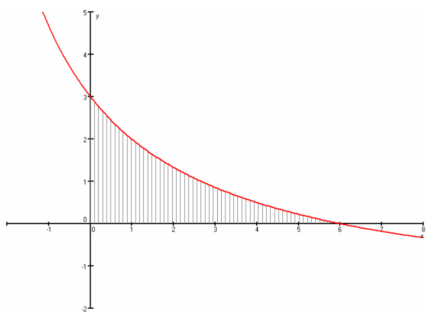
Opgave 3:
$Opp(V) = 0{,}4 \cdot (f(0{,}2) + f(0{,}6) + f(1{,}0) + f(1{,}4) + f(1{,}8)) = 12{,}08$



Opgave 4:
ondersom:
$= 0{,}5 \cdot (f(-3) + f(-2{,}5) + f(-2) + f(-1{,}5) + f(-1) + f(-0{,}5)) = 4{,}19$
bovensom:
$= 0{,}5 \cdot (f(-2{,}5) + f(-2) + f(-1{,}5) + f(-1) + f(-0{,}5) + f(0)) = 5{,}42$
dus $4{,}19 \le Opp(V) \le 5{,}42$

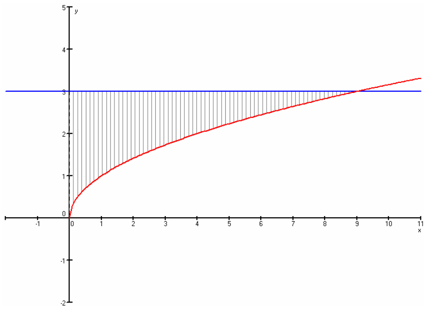


Opgave 5:
a. $f(0{,}5) + f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5) + f(4{,}5) + f(5{,}5) = 6{,}28$
b. ondersom:
$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 4{,}91$
bovensom:
$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 7{,}91$
dus $4{,}91 \le Opp(V) \le 7{,}91$



Opgave 6:
a. de blauwe rechthoek wordt gehalveerd (in de breedte, want het verticale gedeelte blijft hetzelfde).
b. van de blauwe rechthoekjes wordt de breedte bijna nul, dus van de totale blauwe rechthoek wordt de breedte bijna nul, dus de oppervlakte wordt bijna nul.
dus $\lim_{\Delta x \to 0} (bovensom - ondersom) = 0$

Opgave 7:



$\sqrt{x} = 3$

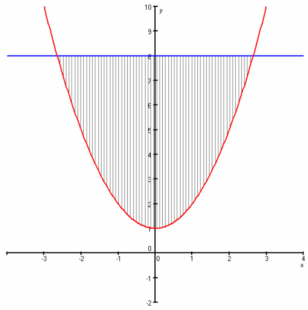
$x = 9$

neem $y_1 = \sqrt{x}$

$$Opp(V) = Opp(rechthoek) - \int_0^9 \sqrt{x}dx =$$

$$= 9 \cdot 3 - fnInt(y_1, X, 0, 9) = 27 - 18{,}00 = 9{,}00$$

Opgave 8:



$x^2 + 1 = 8$

$x^2 = 7$

$x = \sqrt{7} \quad \vee \quad x = -\sqrt{7}$

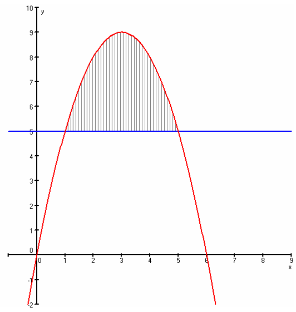
neem $y_1 = x^2 + 1$

$$Opp(V) = Opp(rechthoek) - \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} (x^2 + 1)dx =$$

$$= 2\sqrt{7} \cdot 8 - fnInt(y_1, X, -\sqrt{7}, \sqrt{7})$$

$$= 16\sqrt{7} - 17{,}638 = 24{,}69$$

Opgave 9:



$6x - x^2 = 5$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-1)(x-5) = 0$

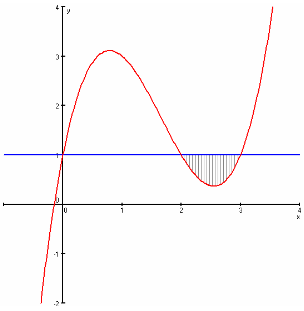
$x = 1 \quad \vee \quad x = 5$

neem $y_1 = 6x - x^2$

$$Opp(V) = \int_1^5 (6x - x^2)dx - Opp(rechthoek) =$$

$$= fnInt(y_1, X, 1, 5) - 4 \cdot 5 = 30{,}67 - 20 = 10{,}67$$

Opgave 10:



a. $x^3 - 5x^2 + 6x + 1 = 1$

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$

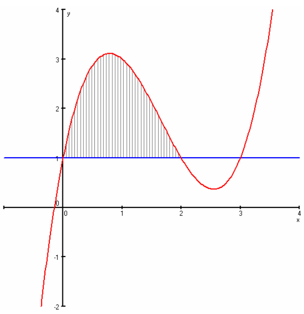
$x(x-2)(x-3) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = 3$

neem $y_1 = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$

$$Opp(V) = Opp(rechthoek) - \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x + 1)dx$$

$$= 1 \cdot 1 - fnInt(y_1, X, 2, 3) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$$



b. $$Opp(W) = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x + 1)dx - Opp(rechthoek)$$

$$= fnInt(y_1, X, 1, 2) - 2 \cdot 1 = 4{,}67 - 2 = 2{,}67$$