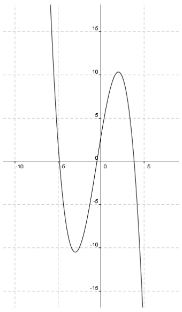
Hoofdstuk 13: Afgeleide en tweede afgeleide

13.1 De tweede afgeleide

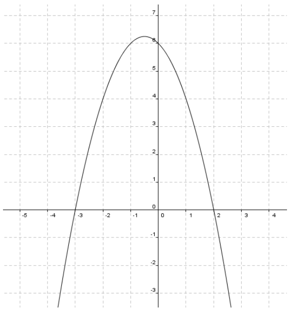
Opgave 1:

a.



b. f is dalend op $\langle\leftarrow,-3\rangle$ en $\langle 2,\rightarrow\rangle$
f is stijgend op $\langle -3,2\rangle$
toenemende stijging op $\langle -3,-\frac{1}{2}\rangle$
afnemende stijging op $\langle -\frac{1}{2},2\rangle$

c. $f'(x)=-x^2-x+6$

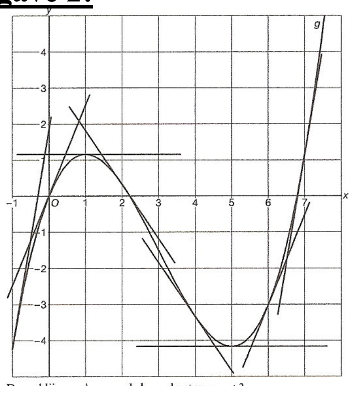


d. $x_P=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}$

e. bij $x_P=-\frac{1}{2}$ gaat de grafiek over van een toenemende stijging in een afnemende stijging

Opgave 2:

a.



b. $x<3$

c. $(3,-1\frac{1}{2})$

d. onder
boven

Opgave 3:

Bij $(-1, \ln\sqrt{2})$ gaat de grafiek over van een toenemende daling in een afnemende daling.

Bij $(1, \ln\sqrt{2})$ gaat de grafiek over van een toenemende stijging in een afnemende stijging.

Opgave 4:

a. $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$

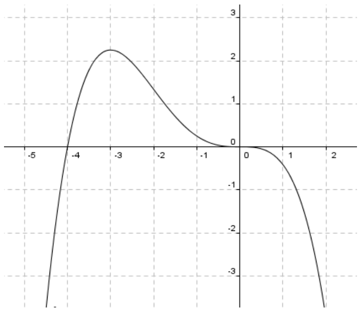
$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$

$f''(x) = -x^2 - 2x = 0$

$-x(x+2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$

buigpunten: $(0,0)$ en $(-2, 1\frac{1}{3})$



b. $f'(0) = 0$ dus in $(0,0)$

Opgave 5:

$f(x) = x \cdot e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x) \cdot e^x$

$f''(x) = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x = e^x + e^x + x \cdot e^x = (2+x) \cdot e^x = 0$

$x = -2 \quad \vee \quad e^x = 0$ (k.n.)

$f'(-2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$

$f(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$

$k: \quad y = -\frac{1}{e^2}x + b$ door $(-2, -\frac{2}{e^2})$

$-\frac{2}{e^2} = \frac{2}{e^2} + b$

$b = -\frac{4}{e^2}$

$k: \quad y = -\frac{1}{e^2}x - \frac{4}{e^2}$

Opgave 6:

a. $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5$

$f_5'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$

$f_5''(x) = 3x^2 - 12x + 10 = 0$

$D = 24$ dus twee oplossingen, dus de grafiek van f heeft twee buigpunten

b. $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5$

$f_6'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

$f_6''(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0$

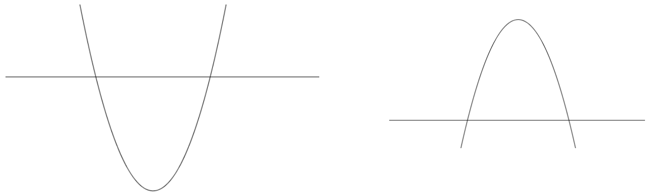
$D = 0$ dus één oplossing

voor iedere x geldt dat $f_6''(x) \geq 0$ dus er is geen buigpunt

c. de grafiek van een willekeurige vierdegraads functie heeft als tweede afgeleide een tweedegraads functie

dus $f''(x) = ax^2 + bx + c = 0$

als $D > 0$ dan heeft de grafiek van f' twee extremen dus heeft de grafiek van f twee buigpunten



als $D = 0$ dan heeft de grafiek van f' geen extremen dus heeft de grafiek van f geen buigpunten

als $D < 0$ dan heeft de grafiek van f' geen extremen dus heeft de grafiek van f geen buigpunten

Opgave 7:

$f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$

$f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + 1\frac{1}{2}x$

$f_p''(x) = 12x^2 + 6px + 1\frac{1}{2} = 0$

$D = 36p^2 - 72 \leq 0$

$36p^2 \leq 72$

$p^2 \leq 2$

$-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$

Opgave 8:

a. $f(x) = \dfrac{5 + 10\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{10}{x} - (5 + 10\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{10 - 5 - 10\ln x}{x^2} = \frac{5 - 10\ln x}{x^2} = 0$$

$5 - 10\ln x = 0$

$-10\ln x = -5$

$\ln x = \frac{1}{2}$

$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$y = \dfrac{10}{\sqrt{e}}$

$B_f = \langle \leftarrow, \dfrac{10}{\sqrt{e}}]$

b. $$f''(x) = \frac{x^2 \cdot -\frac{10}{x} - (5 - 10\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-10x - 10x + 20x\ln x}{x^4} = \frac{-20x + 20x\ln x}{x^4} = 0$$

$-20x + 20x\ln x = 0$

$20x(-1 + \ln x) = 0$

$x = 0$ (k.n.) $\vee$ $\ln x = 1$

$x = e$

$y = \frac{15}{e}$

dus het buigpunt is het punt $(e, \frac{15}{e})$

Opgave 9:

a. $f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3$

$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} \cdot (\ln x + 1) = 0$

$\frac{2}{x} = 0 \quad \vee \quad \ln x = -1$

k.n. $\quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$y = -4$

top $(\frac{1}{e}, -4)$

b. $f''(x) = \dfrac{-2}{x^2} \cdot (\ln x + 1) + \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2\ln x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2} = 0$

$\ln x = 0$

$x = e^0 = 1$

$y = f(1) = -3$

$f'(1) = 2$

$y = 2x + b$ door $(1, -3)$

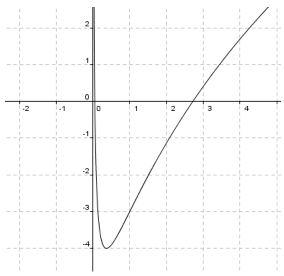
$-3 = 2 + b$

$b = -5$

$y = 2x - 5$

c. $F(x) = x\ln^2 x - 3x$

$F'(x) = 1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} - 3 = \ln^2 x + 2\ln x - 3 = f(x)$



$\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0$

$(\ln x + 3)(\ln x - 1) = 0$

$\ln x = -3 \quad \vee \quad \ln x = 1$

$x = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \quad \vee \quad x = e$

vlakdeel V ligt onder de x-as , dus:

$$Opp(V) = -\int_{\frac{1}{e^3}}^{e} (\ln^2 x + 2\ln x - 3)dx = -[x\ln^2 x - 3x]_{\frac{1}{e^3}}^{e} = -(e - 3e - (\tfrac{9}{e^3} - \tfrac{3}{e^3})) = 2e + \tfrac{6}{e^3}$$

Opgave 10:

a. $f(x) = 6x \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$

$f'(x) = 6 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + 6x \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \cdot -\frac{1}{8}x^2 = (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$

$\frac{3}{4}x^3 = 6 \quad \vee \quad e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0$

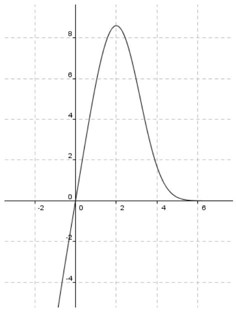
$x^3 = 8 \qquad$ k.n.

$x = 2$

b. $f''(x) = -\frac{9}{4}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \cdot -\frac{1}{8}x^2$

$= -\frac{9}{4}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} - \frac{3}{4}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + \frac{3}{32}x^5 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$

$$= (-3x^2 + \tfrac{3}{32}x^5) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0$$



$$-3x^2 + \tfrac{3}{32}x^5 = 0 \quad \vee \quad e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0$$

$$3x^2(-1 + \tfrac{1}{32}x^3) = 0 \qquad \text{k.n.}$$

$$x = 0 \quad \vee \quad \tfrac{1}{32}x^3 = 1$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x^3 = 32$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt[3]{32}$$

dus voor de top geldt: $x = \sqrt[3]{32}$

c. $f'(0) = 6$

dus $a = 6 \quad \vee \quad a \le 0$

Opgave 11:

$$f(x) = 4\sin^2(x)$$

$$f'(x) = 8\sin(x)\cdot\cos(x) = 4\sin(2x)$$

$$f''(x) = 4\cos(2x)\cdot 2 = 8\cos(2x) = 0$$

$$\cos(2x) = 0$$

$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$$

$$x = \tfrac{1}{4}\pi + k\cdot\tfrac{1}{2}\pi$$

$x = \tfrac{1}{4}\pi$	$x = \tfrac{3}{4}\pi$
$y = 2$	$y = 2$
$f'(\tfrac{1}{4}\pi) = 4$	$f'(\tfrac{3}{4}\pi) = -4$
$y = 4x + b$ door $(\tfrac{1}{4}\pi, 2)$	$y = -4x + b$ door $(\tfrac{3}{4}\pi, 2)$
$2 = \pi + b$	$2 = -3\pi + b$
$b = 2 - \pi$	$b = 2 + 3\pi$
$y = 4x + 2 - \pi$	$y = -4x + 2 + 3\pi$

Opgave 12:

a. $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

b. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ dus $x_A + x_B = -\dfrac{2b}{3a}$ (zie opgave a)

$$f''(x) = 6ax + 2b = 0$$

$$6ax = -2b$$

$$x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{2b}{3a}}{2} = -\frac{b}{3a} = x_C$$

c. $x = -\dfrac{b}{3a}$ als $a \ne 0$ (zie opgave b)