

### 13.3 Raaklijnen aan grafieken

#### Opgave 31:

a.  $rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^p}{p}$

b.  $rc_k = f'(p) = e^p$

c.  $\frac{e^p}{p} = e^p$

$$e^p = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{p} = 1$$

$$\text{k.n.} \quad p = 1$$

$$f'(1) = e$$

$$k: y = e \cdot x$$

#### Opgave 32:

a.  $rc_m = f'(p)$

$$rc_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln p}{p}$$

b.  $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{p} = \frac{\ln p}{p}$$

$$\ln p = 1$$

$$p = e$$

$$f'(e) = \frac{1}{e}$$

$$m: y = \frac{1}{e} \cdot x$$

#### Opgave 33:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x+4} \text{ geeft: } \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$$

$$2x = x + 4$$

$$x = 4$$

$$B(4,2)$$

$$f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$k: y = \frac{1}{4}x + b \text{ door } (4,2)$$

$$2 = 1 + b$$

$$b = 1$$

$$k: y = \frac{1}{4}x + 1$$

**Opgave 34:**

a.  $f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) = 2x$

$f'(x) = \frac{f(x)}{x}$  geeft  $2x = \frac{x^2 + 1}{x}$

$2x^2 = x^2 + 1$

$x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

$f'(1) = 2 \quad f'(-1) = -2$

$y = 2x \quad y = -2x$

b.  $2x = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

$2x(x - 1) = x^2 + 1$

$2x^2 - 2x = x^2 + 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$

**Opgave 35:**

a.  $f(x) = \frac{2 + 2 \ln x}{x}$

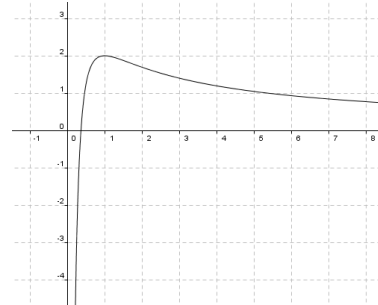
$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{2}{x} - (2 + 2 \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{-2 \ln x}{x^2} = 0$

$\ln x = 0$

$x = 1$

$y = 2$

$B_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$



b.  $f''(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{-2}{x} - (-2 \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x + 4x \ln x}{x^4} = 0$

$-2x + 4x \ln x = 0$

$2x(-1 + 2 \ln x) = 0$

$x = 0 \vee 2 \ln x = 1$

k.n.  $\ln x = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{e}$

$y = \frac{3}{\sqrt{e}}$

het buigpunt is  $(\sqrt{e}, \frac{3}{\sqrt{e}})$ 

c.  $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$

$\frac{-2 \ln x}{x^2} = \frac{2 + 2 \ln x}{x^2}$

$$-2 \ln x = 2 + 2 \ln x$$

$$-4 \ln x = 2$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = e$$

$$k: y = e \cdot x$$

d.  $0 < a < e$

### Opgave 36:

a.  $f(x) = (2x+1)e^x$

$$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x = 0$$

$$2x+3=0 \quad \vee \quad e^x=0 \text{ (k.n.)}$$

$$2x = -3$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

$$y = -2e^{-1\frac{1}{2}} = \frac{-2}{e^{\frac{1}{2}}}$$

$$B_f = \left[\frac{-2}{e^{\frac{1}{2}}}, \rightarrow\right)$$

$$f''(x) = 2e^x + (2x+3)e^x = (2x+5)e^x = 0$$

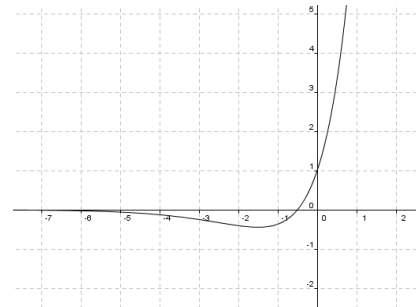
$$2x+5=0 \quad \vee \quad e^x=0 \text{ (k.n.)}$$

$$2x = -5$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

$$y = -4e^{-2\frac{1}{2}} = \frac{-4}{e^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{buigpunt } \left(-2\frac{1}{2}, \frac{-4}{e^{\frac{1}{2}}}\right)$$



b.  $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$

$$(2x+3)e^x = \frac{(2x+1)e^x}{x}$$

$$x(2x+3)e^x = (2x+1)e^x$$

$$x(2x+3) = 2x+1 \quad \vee \quad e^x=0 \text{ (k.n.)}$$

$$2x^2 + 3x = 2x + 1$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

$$f'(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e}$$

$$y = \frac{1}{e}x \qquad y = 4\sqrt{e} \cdot x$$

c.  $0 < a < \frac{1}{e} \quad \vee \quad a > 4\sqrt{e}$

d.  $f'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$

$$(2x+3)e^x = \frac{(2x+1)e^x - 1}{x-1}$$

neem  $y_1 = (2x+3)e^x$  en  $y_2 = \frac{(2x+1)e^x - 1}{x-1}$

intersect geeft:  $x = -0,75$  dan  $y = -0,24$

**Opgave 37:**

a.  $f(x) = x \ln x - x$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{f(x) + e^2}{x}$$

$$\ln x = \frac{x \ln x - x + e^2}{x}$$

$$x \ln x = x \ln x - x + e^2$$

$$x = e^2$$

$$f'(e^2) = 2$$

$$y = 2x + b \text{ door } (0, -e^2)$$

$$b = -e^2$$

$$y = 2x - e^2$$

b. als  $f'(x) = \ln x = 1$

$$x = e$$

$$y = 0$$

raaklijn:  $y = x + b$  door  $(e, 0)$

$$0 = e + b$$

$$b = -e$$

$$y = x - e$$

$$y_B = -1 \text{ dus } -1 = x - e$$

$$x = e - 1$$

als  $f'(x) = \ln x = 0$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

raaklijn is  $y = -1$

$$y_B = -1 \text{ dus } x = 1$$

dus  $1 < b < e - 1$

c.  $f'(x) = \frac{f(x)}{x-3}$

$$\ln x = \frac{x \ln x - x}{x-3}$$

neem  $y_1 = \ln x$  en  $y_2 = \frac{x \ln x - x}{x-3}$

intersect geeft  $x = 1,86 \vee x = 4,54$

raaklijn  $m$ :  $f'(1,86) = 0,62$

$$y = 0,62x + b \text{ door } (3,0)$$

raaklijn  $n$ :  $f'(4,54) = 1,51$

$$y = 1,51x + b \text{ door } (3,0)$$

$$0 = 1,86 + b$$

$$b = -1,86$$

$$m: y = 0,62x - 1,86$$

$$0 = 4,54 + b$$

$$b = -4,54$$

$$n: y = 1,51x - 4,54$$

### Opgave 38:

a.  $f(x) = xe^{1-x}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot -e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$$

$$f''(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (1-x) \cdot -e^{1-x} = -e^{1-x} - e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-2)e^{1-x} = 0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad e^{1-x} = 0 \quad (\text{k.n.})$$

$$y = f(2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$$f'(2) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$y = -\frac{1}{e}x + b \quad \text{door } (2, \frac{2}{e})$$

$$\frac{2}{e} = -\frac{2}{e} + b$$

$$b = \frac{4}{e}$$

$$y = -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e}$$

$$\text{snijpunt met } x\text{-as: } -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e} = 0$$

$$-\frac{1}{e}x = -\frac{4}{e}$$

$$x = 4$$

dus  $A(4,0)$

als  $p < 4$  dan kun je door het punt  $(p,0)$  geen raaklijn tekenen aan de grafiek van  $f$ .

als  $p > 4$  dan kun je door het punt  $(p,0)$  twee raaklijnen tekenen aan de grafiek van  $f$  namelijk één aan de bovenkant en één aan de onderkant.

$p = 4$  is de overgangssituatie van geen naar twee raaklijnen.

b. de lijn  $y = a(x + \frac{1}{2})$  gaat altijd door het punt  $(-\frac{1}{2}, 0)$

voor de raaklijn aan de grafiek van  $f$  die door het punt  $(-\frac{1}{2}, 0)$

$$\text{gaat geldt: } f'(x) = \frac{f(x)}{x + \frac{1}{2}}$$

$$(1-x)e^{1-x} = \frac{xe^{1-x}}{x + \frac{1}{2}}$$

$$(1-x)(x + \frac{1}{2})e^{1-x} = xe^{1-x}$$

$$e^{1-x} = 0 \quad \vee \quad (1-x)(x + \frac{1}{2}) = x$$

$$\text{k.n.} \quad -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x$$

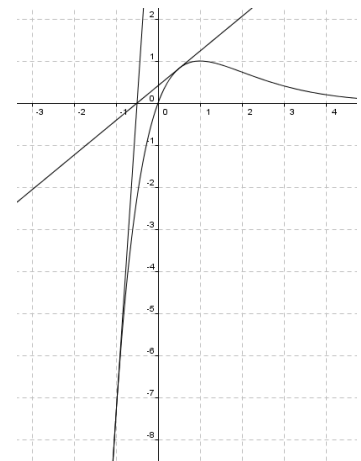
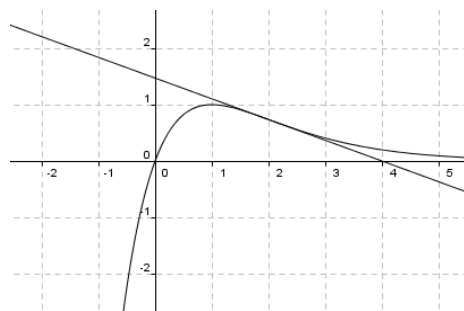
$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$(x+1)(x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

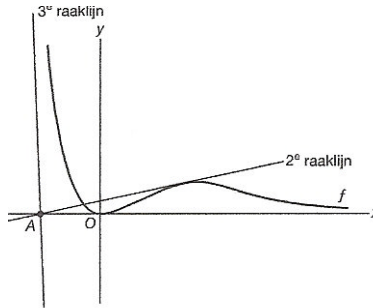
$$f'(-1) = 2e^2 \quad f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

$$\text{dus } a \leq 0 \quad \vee \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{e} \quad \vee \quad a = 2e^2$$

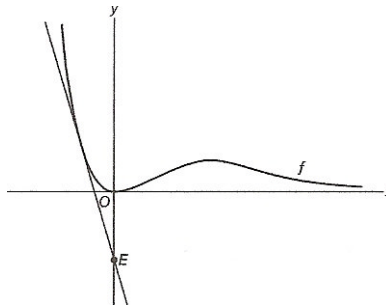
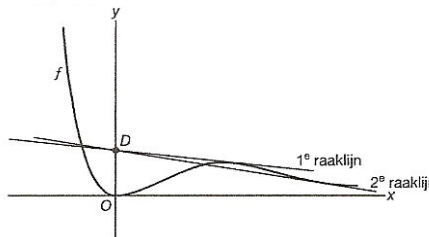


**Opgave 39:**

- a. de  $x$ -as is raaklijn en de twee getekende raaklijnen in de figuur hiernaast



- b. door punt  $B$  kun je maar één raaklijn tekenen, namelijk de  $x$ -as  
 door punt  $C$  kun je geen raaklijnen tekenen  
 door punt  $D$  kun je twee raaklijnen tekenen  
 door punt  $E$  kun je één raaklijn tekenen



- c. de  $x$ -as is raaklijn aan de grafiek van  $f$  er zijn drie punten op de  $x$ -as te vinden van waaruit je twee raaklijnen aan de grafiek van  $f$  kunt tekenen  
 het eerste punt is  $O(0,0)$   
 het tweede punt is punt  $P$ , wat het snijpunt is van de (linker) buigraaklijn met de  $x$ -as  
 het derde punt is punt  $Q$  wat het snijpunt is van de (rechter) buigraaklijn met de  $x$ -as  
 d. ja, dat is punt  $R$  wat het snijpunt is van de (rechter) buigraaklijn met de positieve  $y$ -as

