13.4 Raken en loodrecht snijden

Opgave 40:

a. $f(1) = 0{,}5 \cdot 1^2 + 1 + 1{,}5 = 3$

$g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3$

b. $f'(x) = x + 1$

$f'(1) = 2$

k: $y = 2x + 1$ door $(1,3)$

$3 = 2 + b$

$b = 1$

$y = 2x + 1$

$g'(x) = -2x + 4$

$g'(1) = 2$

l: $y = 2x + b$ door $(1,3)$

$3 = 2 + b$

$b = 1$

$y = 2x + 1$

c. punt A is het raakpunt van f en g

Opgave 41:

De grafieken van f en g hebben in het punt met $x = -3$ dezelfde helling maar de grafieken snijden elkaar niet.

Opgave 42:

a. $f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$

$g'(x) = 2x + 11$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $3x^2 + 8x + 2 = 2x + 11$

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 3)(x - 1) = 0$

$x = -3 \quad \vee \quad x = 1$

$f(-3) = 4 \quad f(1) = 8$

$g(-3) = 4 \quad g(1) = 40$

dus de grafieken van f en g raken elkaar in het punt $(-3,4)$

b. $f'(-3) = 5$

$y = 5x + b$ door $(-3,4)$

$4 = -15 + b$

$b = 19$

$y = 5x + 19$

Opgave 43:

Met de GR krijg je het vermoeden dat het raakpunt het punt $(-1,2)$ is.

$f(-1) = 2$ en $g(-1) = 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+6}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$ dus $f'(-1) = \frac{1}{2}$

$g'(x) = 2x + 2\frac{1}{2}$ dus $g'(-1) = \frac{1}{2}$
dus de grafiekem van f en g raken elkaar in het punt $(-1,2)$

Opgave 44:

$$f'(x) = \frac{(2x+5)\cdot 4 - 4x\cdot 2}{(2x+5)^2} = \frac{8x+20-8x}{(2x+5)^2} = \frac{20}{(2x+5)^2}$$

$g'(x) = 2x + 5$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $\frac{20}{(2x+5)^2} = 2x+5$

$(2x+5)^3 = 20$

$2x + 5 = \sqrt[3]{20}$

$2x = -5 + \sqrt[3]{20}$

$x = -2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{20}$

$f(-2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{20}) = -1{,}684$

$g(-2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{20}) = -1{,}658$

dus de grafieken van f en g raken elkaar niet

Opgave 45:

a. $f'(x) = e^x$

$g'(x) = e^{-x+2}$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $e^x = e^{-x+2}$

$x = -x + 2$

$2x = 2$

$x = 1$

$f(1) = e + 2$

$g(1) = 2e + 2 - e = e + 2$

dus de grafieken van f en g raken elkaar in het punt $(1, e+2)$

b. $Opp(V) = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx$

$= \int_0^1 (e^x + 2 - (2e + 2 - e^{-x+2}))dx$

$= \int_0^1 (e^x - 2e + e^{-x+2})dx$

$= [e^x - 2e\cdot x - e^{-x+2}]_0^1$

$= e - 2e - e - (1 - 0 - e^2)$

$= e^2 - 2e - 1$

Opgave 46:

a. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$g_1'(x) = 2x$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $\dfrac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$

$2x\sqrt{2x} = 1$

$8x^3 = 1$

$x^3 = \frac{1}{8}$

$x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = 1 \quad g_1(\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{4}$ dus de grafieken van f en g raken elkaar niet

b. $g'_p(x) = 2x$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $\dfrac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$

$x = \frac{1}{2}$ (zie opgave a)

$f(\frac{1}{2}) = 1$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + p = 1$

$p = \frac{3}{4}$

dus de grafieken van f en g raken elkaar voor $p = \frac{3}{4}$

Opgave 47:

a. $1 - \dfrac{1}{x} = p$ links en rechts vermenigvuldigen met x geeft:

$x - 1 = px$ invullen in $x - \ln x = px$ geeft:

$x - \ln x = x - 1$

b. $x - \ln x + 2 = p\sqrt{x}$ $\qquad 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{p}{2\sqrt{x}}$

$p = \dfrac{x - \ln x + 2}{\sqrt{x}}$ $\qquad 2\sqrt{x} \cdot (1 - \dfrac{1}{x}) = p$

$\dfrac{x - \ln x + 2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \cdot (1 - \dfrac{1}{x})$

$x - \ln x + 2 = 2x(1 - \dfrac{1}{x})$

$x - \ln x + 2 = 2x - 2$

$4 - x - \ln x = 0$

neem $y_1 = 4 - x - \ln x$ optie zero geeft: $x = 2{,}926$ dus $p = 2{,}25$

Opgave 48:

$f'(x) = -2x + 8$

$g'_p(x) = 2x + p$

$2x + p = -2x + 8$

$p = -4x + 8$

$-x^2 + 8x - 12 = x^2 + x(-4x + 8)$

$-x^2 + 8x - 12 = x^2 - 4x^2 + 8x$

$2x^2 = 12$

$x^2 = 6$

$x = \sqrt{6} \quad \vee \quad x = -\sqrt{6}$

$p = 8 - 4\sqrt{6} \quad \vee \quad p = 8 + 4\sqrt{6}$

Opgave 49:

$f'(x) = 1 - e^x$

$g'(x) = 2x + p$

$2x + p = 1 - e^x$

$p = 1 - 2x - e^x$

$x - e^x = x^2 + x(1 - 2x - e^x)$

$x - e^x = x^2 + x - 2x^2 - xe^x$

$xe^x - e^x = -x^2$

neem $y_1 = xe^x - e^x$ en $y_2 = -x^2$

intersect geeft: $x = -0{,}883 \quad \vee \quad x = 0{,}739$

$p = 2{,}351 \quad \vee \quad p = -2{,}572$

Opgave 50:

a. $f_3'(x) = \frac{2}{x} + 3$

$g_q'(x) = 2x$

$2x = \frac{2}{x} + 3$

$2x^2 = 2 + 3x$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

$x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1 = 0$

$(x - 2)(x + \frac{1}{2}) = 0$

$x = 2 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$ (vervalt)

$f_3(2) = 2\ln 2 + 6$ en $g_q(2) = 4 + q$

$4 + q = 2\ln 2 + 6$

$q = 2\ln 2 + 2$

b. $f_p'(x) = \frac{2}{x} + p$

$g_2'(x) = 2x$

$\frac{2}{x} + p = 2x$

$p = 2x - \frac{2}{x}$

$2\ln x + x(2x - \frac{2}{x}) = x^2 + 2$

$2\ln x + 2x^2 - 2 = x^2 + 2$

neem $y_1 = 2\ln x + 2x^2 - 2$ en $y_2 = x^2 + 2$

intersect geeft $x = 1{,}711$ dus $p = 2{,}252$

Opgave 51:

$f'_p(x) = 2 + \frac{p}{x}$

$g'_p(x) = 2px$

$2px = 2 + \frac{p}{x}$

$2px - \frac{p}{x} = 2$

$p(2x - \frac{1}{x}) = 2$

$p \cdot \frac{2x^2 - 1}{x} = 2$

$p = \frac{2x}{2x^2 - 1}$

$2x + \frac{2x}{2x^2 - 1} \cdot \ln x = \frac{2x}{2x^2 - 1} \cdot x^2$

neem $y_1 = 2x + \frac{2x}{2x^2 - 1} \cdot \ln x$ en $y_2 = \frac{2x^3}{2x^2 - 1}$

intersect geeft: $x = 1$

$p = 2$

Opgave 52:

$f'(x) = 2xe^{x^2-2} + 1$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$2xe^{x^2-2} + 1 = \frac{1}{x}$

neem $y_1 = 2xe^{x^2-2} + 1$ en $y_2 = \frac{1}{x}$

intersect geeft $x = -1{,}280$ (vervalt) $\vee$ $x = 0{,}742$

$q = 1{,}275$

Opgave 53:

$rc_l = -\frac{1}{3}$

Opgave 54:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g'(x) = -x$

$f'(x) \cdot g'(x) = -1$ geeft:

$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1$

$\frac{x}{2\sqrt{x}} = 1$

$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 1$

$\sqrt{x} = 2$
$x = 4$
$f(4) = 2$ en $g(4) = 2$ dus de grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in $(4,2)$

Opgave 55:

$f'(x) = \sqrt{2} \cdot \cos x$
$g'(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin x$
$f'(x) \cdot g'(x) = -1$ geeft:
$\sqrt{2} \cdot \cos x \cdot -\sqrt{2} \cdot \sin x = -1$
$2 \cos x \sin x = 1$
$\sin 2x = 1$
$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
$f(\frac{1}{4}\pi) = 1$ en $g(\frac{1}{4}\pi) = 1$ dus de grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in $(\frac{1}{4}\pi,1)$
$f(1\frac{1}{4}\pi) = -1$ en $g(1\frac{1}{4}\pi) = -1$ dus de grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in $(1\frac{1}{4}\pi,-1)$

Opgave 56:

$f'_p(x) = p \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$g'(x) = -\frac{8}{x^2}$
$f'_p(x) \cdot g'(x) = -1$ geeft:
$\frac{p}{2\sqrt{x}} \cdot -\frac{8}{x^2} = -1$
$8p = 2x^2\sqrt{x}$
$p = \frac{1}{4}x^2\sqrt{x}$
$f_p(x) = g(x)$ geeft:
$\frac{1}{4}x^3 = \frac{8}{x}$
$x^4 = 32$
$x = \sqrt[4]{32} = 2^{\frac{5}{4}} = 2 \cdot \sqrt[4]{2}$
$y = \frac{8}{2^{\frac{5}{4}}} = \frac{2^3}{2^{\frac{5}{4}}} = 2^{\frac{7}{4}} = 2 \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2 \cdot \sqrt[4]{8}$
$p = 2^{1\frac{1}{8}} = 2 \cdot \sqrt[8]{2}$

Opgave 57:

a. $f'(x) = 2x - 4$
$f'(5) = 6$ dus $rc_k = -\frac{1}{6}$
k: $y = -\frac{1}{6}x + b$ door $(5,5)$
$5 = -\frac{5}{6} + b$

$b = 5\frac{5}{6}$

$y = -\frac{1}{6}x + 5\frac{5}{6}$

b. $rc_l = -5$ dus $g'(x) = \frac{1}{5}$

$$g'(x) = \frac{(x+2)\cdot 2 - (2x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{1}{5}$$

$(x+2)^2 = 25$

$x+2 = 5 \quad \vee \quad x+2 = -5$

$x = 3 \quad \vee \quad x = -7$

$y = 1 \qquad y = 3$

$p = 16 \quad \vee \quad p = -32$

c. $rc_m = -8$ dus $h'(x) = \frac{1}{8}$

$$h'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}\cdot 2 - 2x\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x}{x^2+4}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+4} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}$$

$$= \frac{\frac{2(x^2+4)-2x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} =$$

$$= \frac{8}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{8}$$

$(x^2+4)\sqrt{x^2+4} = 64$

$(x^2+4)^3 = 4096$

$x^2+4 = 16$

$x^2 = 12$

$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \vee \quad x = -2\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3} \qquad y = -\sqrt{3}$

$q = 17\sqrt{3} \quad \vee \quad q = -17\sqrt{3}$

Opgave 58:

$rc_k = -\frac{1}{2}$ dus $f_p'(x) = 2$

$f_p'(x) = 2xe^x + (x^2 - p)e^x = (x^2 + 2x - p)e^x = 2$

$x^2e^x + 2xe^x - pe^x = 2$

$-pe^x = -x^2e^x - 2xe^x + 2$

$p = x^2 + 2x - \frac{2}{e^x}$

$(x^2 - (x^2 + 2x - \frac{2}{e^x}))e^x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$(\frac{2}{e^x} - 2x)e^x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$2 - 2xe^x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

neem $y_1 = 2 - 2xe^x$ en $y_2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

intersect geeft $x = -5{,}12 \quad \vee \quad x = -0{,}70$

$y = 2{,}06 \qquad y = -0{,}85$

dus $A(-5{,}12\,;2{,}06)$ of $A(-0{,}70\,;-0{,}85)$

Opgave 59:

a. $f(x) = e^{1-x^2}$

$f'(x) = -2xe^{1-x^2}$

$f''(x) = -2e^{1-x^2} + -2x \cdot -2xe^{1-x^2} = (4x^2 - 2)e^{1-x^2} = 0$

$4x^2 - 2 = 0 \quad \vee \quad e^{1-x^2} = 0$

$4x^2 = 2$ k.n.

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \qquad y = \sqrt{e}$

$(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{e})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{e})$

b. $f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2} = -\frac{1}{a}$

$a = \dfrac{1}{2xe^{1-x^2}}$

$e^{1-x^2} = \dfrac{x}{2xe^{1-x^2}}$

$e^{1-x^2} = \dfrac{1}{2e^{1-x^2}}$

neem $y_1 = e^{1-x^2}$ en $y_2 = \dfrac{1}{2y_1}$

intersect geeft $x = 1{,}16 \quad \vee \quad x = -1{,}16$

$a = 0{,}61 \quad \vee \quad a = -0{,}61$

Opgave 60:

a. $f'(x) = 3x^2 - 1$

$g'_p(x) = -\dfrac{p}{x^2}$

$f'(x) = g'_p(x)$ geeft:

$3x^2 - 1 = -\dfrac{p}{x^2}$

$3x^4 - x^2 = -p$

$p = -3x^4 + x^2$

$x^3 - x = \dfrac{-3x^4 + x^2}{x}$

$x^3 - x = -3x^3 + x$

$4x^3 - 2x = 0$

$2x(2x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$p = -\frac{1}{4} \quad \vee \quad p = -\frac{1}{4}$

b. $f'(x) \cdot g'_p(x) = -1$

$(3x^2 - 1) \cdot -\frac{p}{x^2} = -1$

$p = \frac{x^2}{3x^2 - 1}$

$x^3 - x = \frac{\frac{x^2}{3x^2 - 1}}{x}$

$x^4 - x^2 = \frac{x^2}{3x^2 - 1}$

$x^2(x^2 - 1)(3x^2 - 1) = x^2$

$x^2 = 0 \quad \vee \quad (x^2 - 1)(3x^2 - 1) = 1$

$3x^4 - 4x^2 + 1 = 1$

$3x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2(3x^2 - 4) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 3x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$

$y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} \qquad y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$

$p = \frac{4}{9} \qquad B(\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}})$ of $B(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}})$