7.3 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde

Opgave 38:

$K_n = 1{,}038 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 5000$

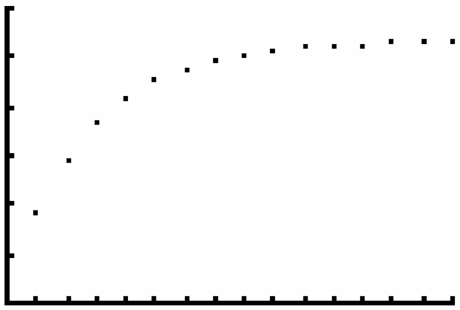
en $K_n - K_{n-1} = 0{,}038 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 5000$

Opgave 39:

a. wel
b. niet
c. wel
d. niet
e. wel
f. wel

Opgave 40:

a.



grenswaarde $= 26\frac{2}{3}$

b. nee

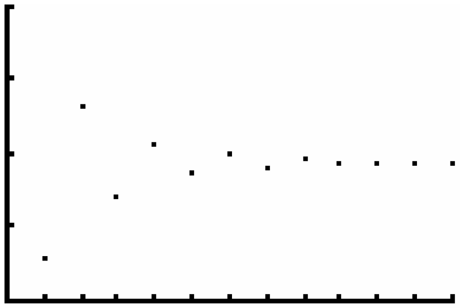
Opgave 41:

a. $b = 2$ geeft grenswaarde $= 5$
$b = 20$ geeft grenswaarde $= 50$
$b = 5$ geeft grenswaarde $= 12{,}5$

b. bij $b = 2$ is de grafiek dalend
bij $b = 5$ en $b = 20$ krijg je een stijgende grafiek

Opgave 42:

a.

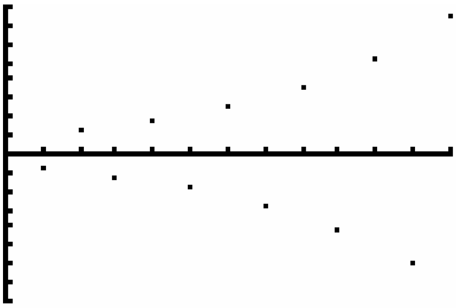


grenswaarde $= 9{,}375$

b. de stippen van de grafiek liggen om en om onder en boven de grenswaarde.

Opgave 43:

a.



geen grenswaarde

b. de termen zijn afwisselend positief en negatief, de positieve termen worden steeds groter en de negatieve termen worden steeds kleiner.

Opgave 44:

a.

$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11{,}5$	$u_4 = 18{,}25$
$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11{,}5$	$u_4 = 18{,}25$	$u_5 = 28{,}375$

b. $(7;11{,}5)$ $(11{,}5;18{,}25)$

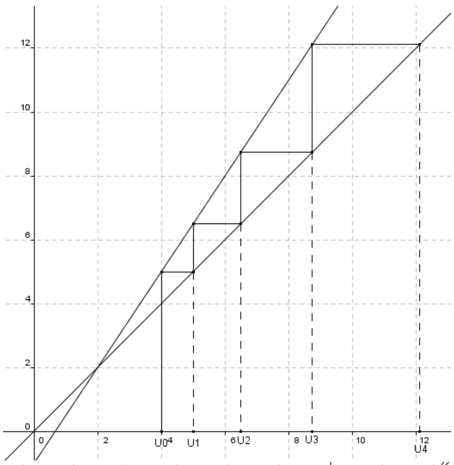
c. $y = 1{,}5x + 1$

d. $u_n = y$ $u_{n-1} = x$

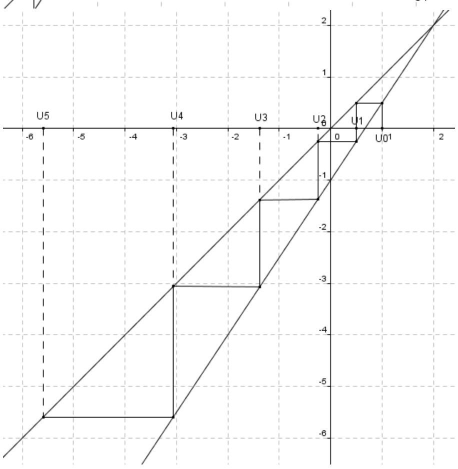
e. ja, ja

Opgave 45:

a.



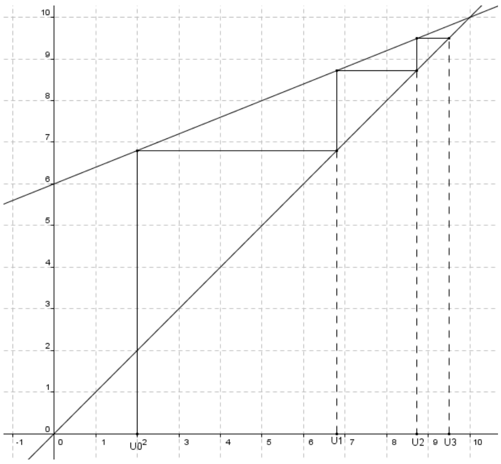
b.



c. de webgrafiek komt meteen in het snijpunt van $y = 1{,}5x - 1$ en $y = x$, dus de rij u_n is een constante rij, namelijk de rij $u_n = 2$

Opgave 46:

a.



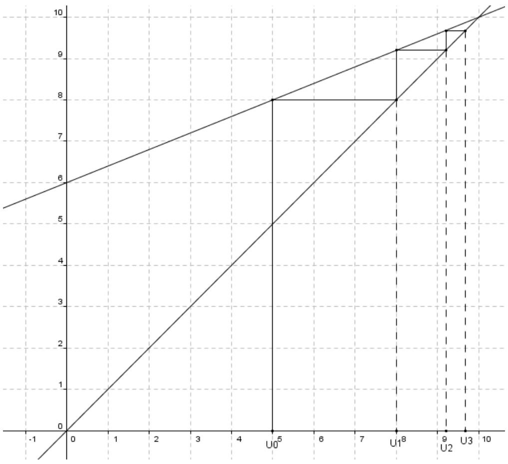
b. de grafiek loopt stapsgewijs omhoog naar het snijpunt

c. $x = 0{,}4x + 6$

$0{,}6x = 6$

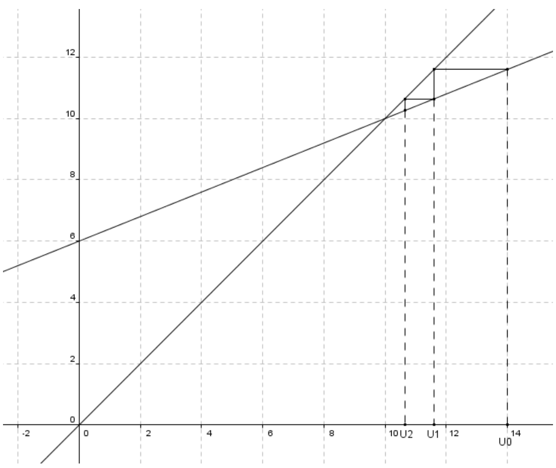
$x = 10$

d.



ja, de grenswaarde $= 10$

e.

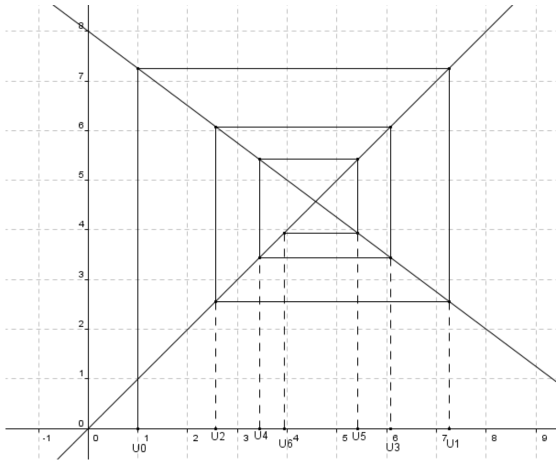


f. de grenswaarde is het snijpunt van de lijnen $y = 0{,}4x + 6$ en $y = x$, de startwaarde heeft geen invloed op dit snijpunt.

Opgave 47:

a. $u_n = -0{,}75u_{n-1} + 8$ met $u_0 = 1$

b.



c. $x = -0{,}75x + 8$

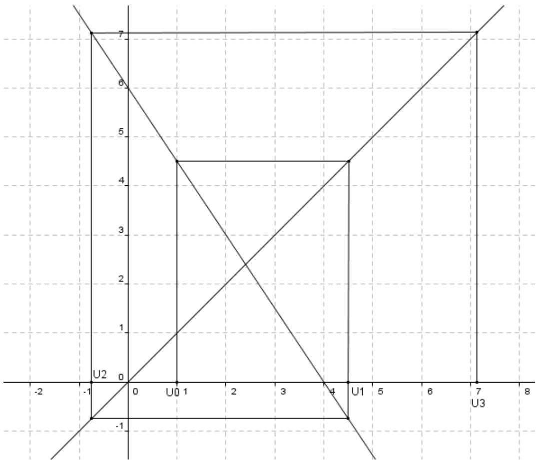
$1{,}75x = 8$

$x = 4\frac{4}{7}$ dus de grenswaarde $= 4\frac{4}{7}$

Opgave 48:

a. $u_n = -1{,}5u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 1$

b.

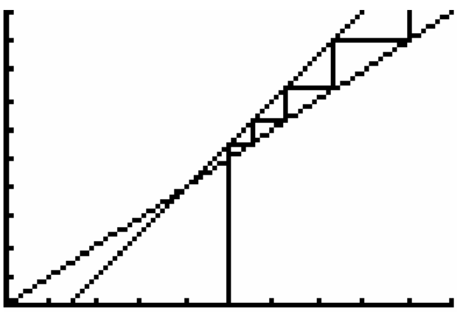


c. nee, er is geen grenswaarde

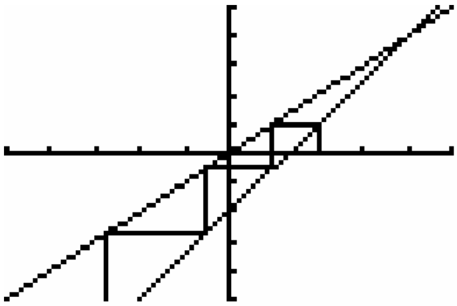
d. als $u_0 = 2{,}4$ dan is u_n een constante rij, namelijk $u_n = 2{,}4$

Opgave 49:

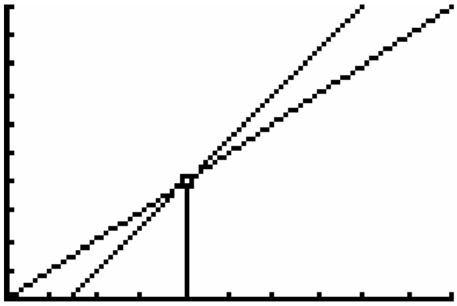
a.



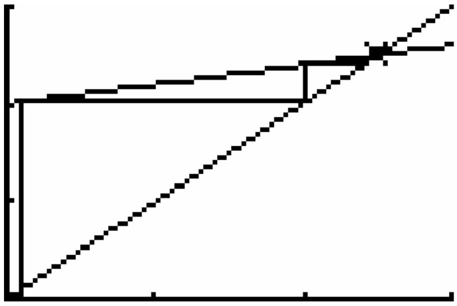
geen convergentie

b. 

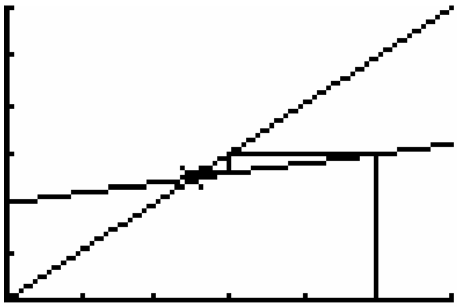
geen convergentie

c. 

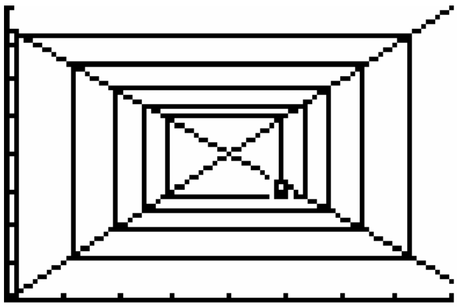
u_n is een constante rij, dus wel convergentie
grenswaarde $= 4$

d. 

wel convergentie
$x = 0{,}2x + 200$
$0{,}8x = 200$
$x = 250$ dus grenswaarde $= 250$

e. 

wel convergentie
grenswaarde $= 250$

f. 

wel convergentie
$x = -0{,}86x + 744$
$1{,}86x = 744$
$x = 400$ dus grenswaarde $= 400$

Opgave 50:

a. $A_n = 0{,}8A_{n-1} + 300$ met $A_0 = 2500$

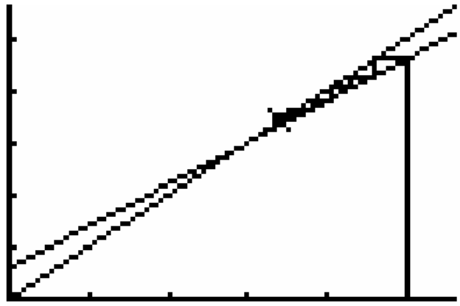
b. wel convergentie

c. $x = 0{,}8x + 300$

$0{,}2x = 300$

$x = 1500$

grenswaarde $= 1500$

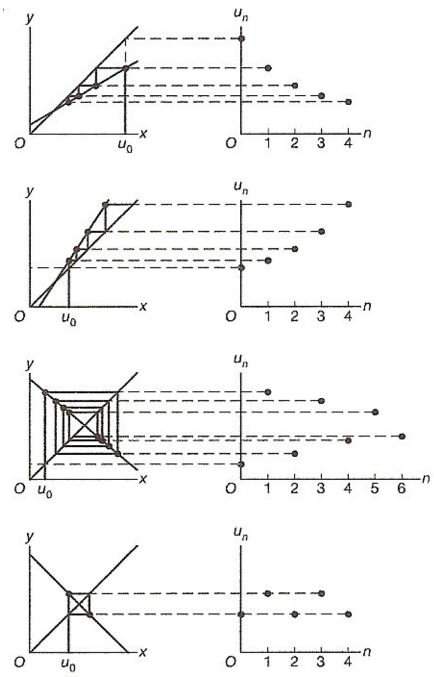


Opgave 51:

a. je kunt in de webgrafiek bij elke *n* de waarde van u_n aflezen op de lijn $y = ax + b$

In de tijdgrafiek zijn deze punten (n, u_n) ook getekend.

b.



Opgave 52:

a. bij een rekenkundige rij is het verschil tussen twee opeenvolgende termen constant

$a = 1$ en *b* kan elke waarde aannemen

b. bij een meetkundige rij is het quotiënt van twee opeenvolgende termen constant

$b = 0$ en $a \neq 0$

Opgave 53:

a. $u_n = 1{,}05 \cdot u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 750$

b. $u_3 = 1{,}05 \cdot u_2 + 500 = 1{,}05 \cdot (1{,}05^2 \cdot 750 + 1{,}05 \cdot 500 + 500) + 500 =$

$= 1{,}05^3 \cdot 750 + 1{,}05^2 \cdot 500 + 1{,}05 \cdot 500 + 500$

c. $u_6 = 1{,}05^6 \cdot 750 + 1{,}05^5 \cdot 500 + 1{,}05^4 \cdot 500 + 1{,}05^3 \cdot 500 + 1{,}05^2 \cdot 500 + 1{,}05 \cdot 500 + 500$

d. factor: $r = 1{,}05$

beginterm: 500

Opgave 54:

a. $u_n = 1{,}5 \cdot u_{n-1} - 5$ met $u_0 = 30$

$\bar{u} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-5}{1-1{,}5} = \dfrac{-5}{-0{,}5} = 10$

$u_n = \bar{u} + a^n \cdot (u_0 - \bar{u}) = 10 + 1{,}5^n \cdot (30-10) = 10 + 20 \cdot 1{,}5^n$

b. $x_n = 0{,}75 \cdot x_{n-1} + 20$ met $x_0 = 100$

$\bar{x} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{20}{1-0{,}75} = 80$

$x_n = \bar{x} + a^n \cdot (x_0 - \bar{x}) = 80 + 0{,}75^n \cdot (100-80) = 80 + 20 \cdot 0{,}75^n$

c. $K_n = ,\cdot K_{n-1} - 200$ met $K_0 = 1000$

$\bar{K} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-200}{1-0{,}05} = 4000$

$K_n = \bar{K} + a^n \cdot (K_0 - \bar{K}) = 4000 + 1{,}05^n \cdot (1000 - 4000) = 4000 - 3000 \cdot 1{,}05^n$

Opgave 55:

a. $K_n = 1{,}04 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 800$

b. $\bar{K} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-150}{1-1{,}04} = 3750$

$K_n = \bar{K} + a^n \cdot (K_0 - \bar{K}) = 3750 + 1{,}04^n \cdot (800 - 3750) = 3750 - 2950 \cdot 1{,}04^n$

c. $K_6 = 17{,}31$

$K_7 = -132$ dus 1 januari 2013

$1{,}04 \cdot 17{,}31 = 18{,}00$

Opgave 56:

a. $A_n = 0{,}75 \cdot A_{n-1} + 50$ met $A_0 = 100$

b. $\bar{A} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{50}{1-0{,}75} = 200$

$A_n = \bar{A} + a^n \cdot (A_0 - \bar{A}) = 200 + 0{,}75^n \cdot (100-200) = 200 - 100 \cdot 0{,}75^n$

c. $A_8 = 190\,\text{mg}$

d. ja, de grenswaarde $= 200$

Opgave 57:

a. 7.00 uur: $P_0 = 10000$

7.30 uur: $P_1 = 10000 + 0{,}4 \cdot 30000 = 22000$

8.00 uur: $P_2 = 22000 + 0{,}4 \cdot 18000 = 29200$

b. $P_n = P_{n-1} + 0{,}4 \cdot (40000 - P_{n-1})$

$= P_{n-1} + 16000 - 0{,}4 \cdot P_{n-1}$

$= 0{,}6 \cdot P_{n-1} + 16000$ met $P_0 = 10000$

c. $\bar{P} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{16000}{1-0{,}6} = 40000$

$P_n = \bar{P} + a^n \cdot (P_0 - \bar{P}) = 40000 + 0{,}6^n \cdot (10000 - 40000) = 40000 - 30000 \cdot 0{,}6^n$

d. $P_6 = 38600$

$P_7 = 39160$ dus vanaf $n = 7$

Opgave 58:

a. $L_0 = 150$

$L_1 = 150 + 0{,}2 \cdot 650 = 280$

$L_2 = 280 + 0{,}2 \cdot 520 = 384$

b. $L_n = L_{n-1} + 0{,}2 \cdot (800 - L_{n-1})$

$= L_{n-1} + 160 - 0{,}2 \cdot L_{n-1}$

$= 0{,}8 \cdot L_{n-1} + 160$ met $L_0 = 150$

c. $\overline{L} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{160}{1-0{,}8} = 800$

$L_n = \overline{L} + a^n \cdot (L_0 - \overline{L}) = 800 + 0{,}8^n \cdot (150 - 800) = 800 - 650 \cdot 0{,}8^n$

d. 90% van 800 is 720

$L_9 = 712$

$L_{10} = 730$

dus 11 dagen