7.4 Stelsels differentievergelijkingen.

Opgave 59:

a. De hazenpopulatie zal toenemen omdat er weinig lynxen zijn die op de hazen jagen.
De lynxenpopulatie zal toenemen omdat er veel hazen zijn die als voedsel dienen.

b. De hazenpopulatie zal afnemen en de lynxenpopulatie zal afnemen.

c. Uitgaande van weinig lynxen en weinig hazen krijg je:
toename aantal hazen → toename aantal lynxen → afname aantal hazen → afname aantal lynxen → toename aantal hazen → etc.

d. Bij beide populaties is de periode 8 jaar.

e. op $t = 1$ geldt: $H = 10000$ en $L = 4600$

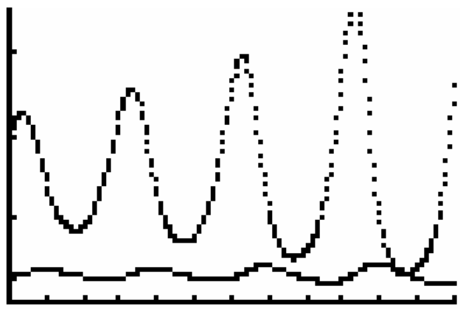
f. het hoogste punt in de hazengrafiek geeft het meest rechtse punt in het prooi-roofdier-diagram
het laagste punt in de hazengrafiek geeft het meest linkse punt in het prooi-roofdier-diagram
het laagste punt in de lynxengrafiek geeft het laagste punt in het prooi-roofdier-diagram

Opgave 60:

a. op $t = 1$ zijn er 1025 prooidieren en 152 roofdieren
op $t = 5$ zijn er 1104 prooidieren en 159 roofdieren

b. kijk in de tabel of in de time-grafiek, na 25 maanden zijn er 196 roofdieren

c. de populatie prooidieren bereikt 4 maal een maximum (zie grafiek)



Opgave 61:

De groeivoet van de prooidieren is 0,15 dus $P_t = 1{,}15P_{t-1} - 0{,}0015R_{t-1} \cdot P_{t-1}$

a. op $t = 5$ zijn er 666 prooidieren en 153 roofdieren
op $t = 15$ zijn er 317 prooidieren en 137 roofdieren

b. uit de grafiek blijkt dat P_t maximaal is voor $n = 190$, er zijn dan 2501 prooidieren

c. $P_t = 1{,}12P_{t-1} - 0{,}0015R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
plot de tijdgrafieken van b en c
de eerste bewering is niet waar, het maximale aantal prooidieren neemt toe.
de tweede bewering is niet waar, het aantal prooidieren is voor de tweede keermaximaal als $n = 230$.

d. $R_t = 0{,}95R_{t-1} + 0{,}00004P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
de bewering is niet waar, in de tijdgrafiek zie je dat het maximale aantal roofdieren toeneemt

Opgave 62:

a. $(0{,}25 - 0{,}0015\overline{R}) \cdot \overline{P} = 0$

$0{,}25 - 0{,}0015\overline{R} = 0$

$-0{,}0015\overline{R} = -0{,}25$

$\overline{R} = 166\frac{2}{3} = 167$

$(-0{,}03 + 0{,}00004\overline{P}) \cdot \overline{R} = 0$

$-0{,}03+0{,}00004\overline{P}=0$

$0{,}00004\overline{P}=0{,}03$

$\overline{P}=750$

b. de aantallen van de populaties veranderen niet meer, dus $P=750$ en $R=166\frac{2}{3}$

Opgave 63:

a. $P_t=1{,}15P_{t-1}-0{,}006R_{t-1}\cdot P_{t-1}$

$P_t=P_{t-1}+0{,}15P_{t-1}-0{,}006R_{t-1}\cdot P_{t-1}$

$P_t=P_{t-1}+(0{,}15-0{,}006R_{t-1})\cdot P_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$(0{,}15-0{,}006\overline{R})\cdot\overline{P}=0$

$0{,}15-0{,}006\overline{R}=0$

$-0{,}006\overline{R}=-0{,}15$

$\overline{R}=25$

$R_t=0{,}94R_{t-1}+0{,}00006P_{t-1}\cdot R_{t-1}$

$R_t=R_{t-1}-0{,}06R_{t-1}+0{,}00006P_{t-1}\cdot R_{t-1}$

$R_t=R_{t-1}+(-0{,}06+0{,}00006P_{t-1})\cdot R_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$(-0{,}06+0{,}00006\overline{P})\cdot\overline{R}=0$

$-0{,}06+0{,}00006\overline{P}=0$

$0{,}00006\overline{P}=0{,}06$

$\overline{P}=1000$

b. $P_t=P_{t-1}+(0{,}25-0{,}006R_{t-1})\cdot P_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$0{,}25-0{,}006\overline{R}=0$

$-0{,}006\overline{R}=-0{,}25$

$\overline{R}=41\frac{2}{3}$

$\overline{P}=1000$

dus als de natuurlijke sterfte van de roofdieren toeneemt, blijft $\overline{R}$ gelijk en neemt $\overline{P}$ toe

c. stel de natuurlijke sterfte van de roofdieren neemt toe, waardoor de groeivoet $-0{,}08$ wordt

$R_t=R_{t-1}+(-0{,}08+0{,}00006P_{t-1})\cdot R_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$-0{,}08+0{,}00006\overline{P}=0$

$0{,}00006\overline{P}=0{,}08$

$0{,}00006\overline{P}=0{,}08$

$\overline{P}=1333\frac{1}{3}$

dus $\overline{P}$ wordt groter, namelijk $\overline{P}=1333\frac{1}{3}$ en $\overline{R}$ blijft gelijk

dus als de natuurlijke sterfte van de roofdieren toeneemt, blijft $\overline{R}$ gelijk maar $\overline{P}$ neemt toe

Opgave 64:

a. $P_1 = 1{,}38P_0 + a \cdot P_0 \cdot R_0$

$539 = 1{,}38 \cdot 550 + a \cdot 550 \cdot 200$

$539 = 759 + 110000a$

$-110000a = 220$

$a = -0{,}002$

$R_1 = 0{,}90R_0 + b \cdot P_0 \cdot R_0$

$202 = 0{,}90 \cdot 200 + b \cdot 550 \cdot 200$

$202 = 180 + 110000b$

$-110000b = -22$

$b = 0{,}0002$

b. $nMin = 0$

$u(n) = 1{,}38 \cdot u(n-1) - 0{,}002 \cdot u(n-1) \cdot v(n-1)$

$u(nMin) = 550$

$v(n) = 0{,}90 \cdot v(n-1) + 0{,}0002 \cdot u(n-1) \cdot v(n-1)$

$v(nMin) = 200$

kijk in de tabel, dan is R_t maximaal voor $t = 4$ met $R_{\max} = 205$

c. $P_t = P_{t-1} + (0{,}38 - 0{,}002R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$0{,}38 - 0{,}002\overline{R} = 0$

$-0{,}002\overline{R} = -0{,}38$

$\overline{R} = 190$

$R_t = R_{t-1} + (-0{,}10 + 0{,}0002P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$-0{,}10 + 0{,}0002\overline{P} = 0$

$0{,}0002\overline{P} = 0{,}1$

$\overline{P} = 500$

dus $\overline{P} = 500$ en $\overline{R} = 190$

d. stel de vruchtbaarheid van de prooidieren neemt toe zodat de groeivoet 0,4 wordt.
dan geldt:

$P_t = P_{t-1} + (0{,}40 - 0{,}002R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$0{,}40 - 0{,}002\overline{R} = 0$

$-0{,}002\overline{R} = -0{,}40$

$\overline{R} = 200$

dus als de vruchtbaarheid van de prooidieren toeneemt dan blijft $\overline{P}$ gelijk maar $\overline{R}$ neemt toe

Opgave 65:

$P_t = 1{,}18 \cdot P_{t-1} + a \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$

$P_t = P_{t-1} + (0{,}18 + a \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$

in de evenwichtssituatie geldt:

$0{,}18 + a \cdot \overline{R} = 0$

$0{,}18 + a \cdot 800 = 0$
$800a = -0{,}18$
$a = -0{,}000225$
$R_t = 0{,}92 \cdot R_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$R_t = R_{t-1} + (-0{,}08 + b \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$-0{,}08 + b \cdot \overline{P} = 0$
$-0{,}08 + b \cdot 5000 = 0$
$5000b = 0{,}08$
$b = 0{,}000016$

Opgave 66:

a. als de prooidieren en roofdieren elkaar niet beïnvloeden neemt het aantal roofdieren af, dus $0 < c < 1$

b. als de prooidieren en roofdieren elkaar niet beïnvloeden neemt het aantal prooidieren toe, dus $a > 1$
als de prooidieren en roofdieren elkaar wel beïnvloeden zal P_t kleiner zijn dan $a \cdot P_{t-1}$ dus $b < 0$ en zal R_t groter zijn dan $c \cdot R_{t-1}$ dus $d > 0$

c. $P_t = a \cdot P_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$P_t = P_{t-1} + a \cdot P_{t-1} - P_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$P_t = P_{t-1} + (a - 1 + b \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$a - 1 + b \cdot \overline{R} = 0$
$b \cdot \overline{R} = 1 - a$
$\overline{R} = \dfrac{1-a}{b}$
$R_t = c \cdot R_{t-1} + d \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$R_t = R_{t-1} + c \cdot R_{t-1} - R_{t-1} + d \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$R_t = R_{t-1} + (c - 1 + d \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
in de evenwichtssituatie geldt:
$c - 1 + d \cdot \overline{P} = 0$
$d \cdot \overline{P} = 1 - c$
$\overline{P} = \dfrac{1-c}{d}$
dus $\overline{P} = \dfrac{1-c}{d}$ en $\overline{R} = \dfrac{1-a}{b}$

d. als de vruchtbaarheid van de prooidieren verandert, dan verandert het getal a
als a verandert, dan verandert $\overline{R}$, maar omdat $\overline{P}$ onafhankelijk is van a zal $\overline{P}$ niet veranderen

Opgave 67:

$\Delta G < 0$ want door de griep zijn er steeds minder mensen gezond dus het aantal gezonde mensen neemt af.
$\Delta I > 0$ want steeds meer mensen zullen immuun worden voor de griep.

$\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$ want op ieder moment t geldt $G_t + Z_t + I_t = 2000$

Opgave 68:

a. $\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$

dus $\Delta Z = -\Delta G - \Delta I$

$\Delta G = G_t - G_{t-1} = -0{,}00018 G_{t-1} \cdot Z_{t-1}$

$\Delta I = 0{,}15 Z_{t-1}$

$\Delta Z = -\Delta G - \Delta I = 0{,}00018 G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}15 Z_{t-1}$

$Z_t - Z_{t-1} = 0{,}00018 G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}15 Z_{t-1}$

$Z_t = Z_{t-1} + 0{,}00018 G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}15 Z_{t-1}$

b. als er één gezonde inwoner is en één inwoner met griep, dan is de kans dat een gezonde inwoner griep krijgt van de inwoner met griep gelijk aan 0,00018

c. $G_1 = G_0 - 0{,}00018 G_0 \cdot Z_0 = 1900 - 0{,}00018 \cdot 1900 \cdot 100 = 1866$

$Z_1 = Z_0 + 0{,}00018 G_0 \cdot Z_0 - 0{,}15 Z_0 = 100 + 0{,}00018 \cdot 1900 \cdot 100 - 0{,}15 \cdot 100 = 119$

$I_1 = 2000 - G_1 - Z_1 = 2000 - 1866 - 119 = 15$

$G_2 = G_1 - 0{,}00018 G_1 \cdot Z_1 = 1866 - 0{,}00018 \cdot 1866 \cdot 119 = 1826$

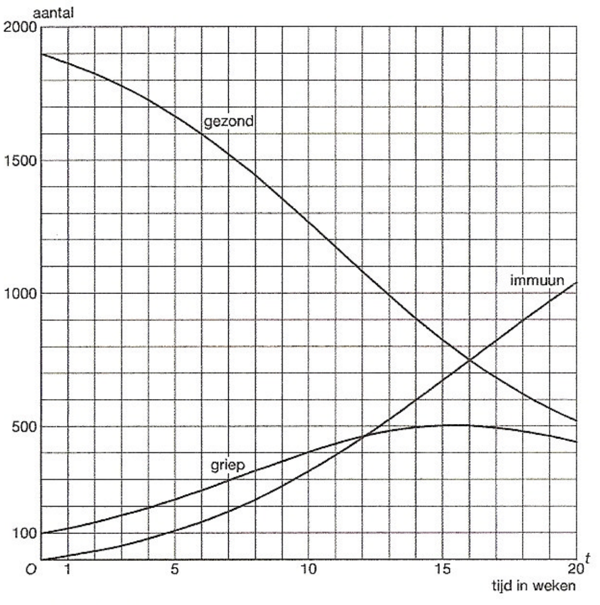
$Z_2 = Z_1 + 0{,}00018 G_1 \cdot Z_1 - 0{,}15 Z_1 = 199 + 0{,}00018 \cdot 1866 \cdot 119 - 0{,}15 \cdot 119 = 141$

$I_2 = 2000 - G_2 - Z_2 = 2000 - 1826 - 141 = 33$

d. $G_{11} = G_{10} - 0{,}00018 G_{10} \cdot Z_{10} = 1265 - 0{,}00018 \cdot 1265 \cdot 404 = 1173$

$Z_{11} = Z_{10} + 0{,}00018 G_{10} \cdot Z_{10} - 0{,}15 Z_{10} = 404 + 0{,}00018 \cdot 1265 \cdot 404 - 0{,}15 \cdot 404 = 435$

e.



Opgave 69:

a. $G_1 = G_0 - a \cdot G_0 \cdot Z_0$

$9408 = 9600 - a \cdot 9600 \cdot 400$

$-192 = -3840000 \cdot a$

$a = 0{,}00005$

$Z_1 = Z_0 + a \cdot G_0 \cdot Z_0 - b \cdot Z_0$

$560 = 400 + 0{,}00005 \cdot 9600 \cdot 400 - b \cdot 400$

$160 = 192 - 400 \cdot b$

$400b = 32$
$b = 0{,}08$

b. de tweede dag is van $t = 1$ tot $t = 2$
$G_1 = 9408$ en $Z_1 = 560$
$G_2 = G_1 - 0{,}00005 \cdot G_1 \cdot Z_1$
$G_2 = 9408 - 0{,}00005 \cdot 9408 \cdot 560 = 9145$
$G_1 - G_2 = 9408 - 9145 = 263$

Opgave 70:

a. $Z_t = Z_{t-1} + 0{,}0001 \cdot G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}20 \cdot Z_{t-1}$

b. $G_1 = G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot Z_0$
$G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot Z_0 = 9216$ (1)
$G_0 + Z_0 + I_0 = 10000$
$G_0 + Z_0 + 0 = 10000$
$Z_0 = 10000 - G_0$ invullen in (1) geeft:
$G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot (10000 - G_0) = 9216$
$G_0 - G_0 + 0{,}0001 G_0{}^2 = 9216$
$G_0{}^2 = 92160000$
$G_0 = 9600$
$Z_0 = 10000 - G_0 = 10000 - 9600 = 400$

Opgave 71:

a. 0,8: 80% van de plattelandsbevolking woont ook het volgend jaar op het platteland
0,04: 4% van de stadsbevolking woont het volgend jaar op het platteland
0,2: 20% van de plattelandsbevolking woont het volgend jaar in de stad
0,96: 96% van de stadsbevolking woont ook het volgend jaar in de stad

b. $0{,}8 + 0{,}2 = 1$ dus de hele plattelandsbevolking woont een jaar later op het platteland (0,8) of in de stad (0,2)
$0{,}96 + 0{,}04 = 1$ dus de hele stadsbevolking woont een jaar later in de stad (0,96) of op het platteland (0,04)
Er komen dus geen inwoners bij en er gaan ook geen inwoners weg, dus is er sprake van een gesloten systeem.

Opgave 72:

a. $0{,}2 + 0{,}8 = 1$ en $0{,}7 + 0{,}3 = 1$

b. het eerste systeem is niet gesloten want $0{,}4 + 0{,}8 \neq 1$ en $0{,}6 + 0{,}2 \neq 1$
het tweede systeem is wel gesloten want $0{,}1 + 0{,}9 = 1$ en $0{,}3 + 0{,}7 = 1$

c. $x_t + y_t \neq x_{t-1} + y_{t-1}$ voor iedere waarde van t

d. er treedt convergentie op, a_t convergeert naar 24 en b_t convergeert naar 24

Opgave 73:

a. er is sprake van een gesloten systeem
$A_{t-1} + B_{t-1} = 600$

$B_{t-1} = 600 - A_{t-1}$

$A_t = 0{,}9 \cdot A_{t-1} + 0{,}3 \cdot B_{t-1}$

$A_t = 0{,}9 \cdot A_{t-1} + 0{,}3 \cdot (600 - A_{t-1})$

$A_t = 0{,}9 \cdot A_{t-1} + 180 - 0{,}3 \cdot A_{t-1}$

$A_t = 0{,}6 \cdot A_{t-1} + 180$

$\overline{A} = \dfrac{180}{1 - 0{,}6} = 450$

$A_t = \overline{A} + 0{,}6^t \cdot (A_0 - \overline{A})$

$A_t = 450 + 0{,}6^t \cdot (350 - 450)$

$A_t = 450 - 100 \cdot 0{,}6^t$

$B_t = 600 - A_t$

$B_t = 600 - (450 - 100 \cdot 0{,}6^t)$

$B_t = 600 - 450 + 100 \cdot 0{,}6^t$

$B_t = 150 + 100 \cdot 0{,}6^t$

b. ja, A_t convergeert naar 450 en B_t convergeert naar 150

<u>Opgave 74:</u>

a. er is sprake van een gesloten systeem

$y_{t-1} + x_{t-1} = 20$

$y_{t-1} = 20 - x_{t-1}$

$x_t = 0{,}25x_{t-1} + 0{,}5 \cdot (20 - x_{t-1})$

$x_t = 0{,}25 + 10 - 0{,}5x_{t-1}$

$x_t = -0{,}25x_{t-1} + 10$ met $x_0 = 4$

$\overline{x} = \dfrac{10}{1 - -0{,}25} = 8$

$x_t = \overline{x} + a^t \cdot (x_0 - \overline{x})$

$x_t = 8 + (-0{,}25)^t \cdot (4 - 8)$

$x_t = 8 - 4 \cdot (-0{,}25)^t$

$y_t = 20 - x_t$

$y_t = 20 - (8 - 4 \cdot (-0{,}25)^t)$

$y_t = 12 + 4 \cdot (-0{,}25)^t$

b. voer in: $y_1 = 8 - 4 \cdot (-0{,}25)^x$ en kijk in de tabel

voor $x = 4$ geldt: $y_1 = 7{,}9844$

voor $x = 5$ geldt: $y_1 = 8{,}0039$

dus vanaf $t = 5$

<u>Opgave 75:</u>

a. $N_t = 0{,}6N_{t-1} + 0{,}2R_{t-1}$

$R_t = 0{,}8R_{t-1} + 0{,}4N_{t-1}$ met $N(0) = 0{,}8$ en $R(0) = 1{,}2$

b. er is sprake van een gesloten systeem

$N_{t-1} + R_{t-1} = 2$

$R_{t-1} = 2 - N_{t-1}$

$N_t = 0{,}6N_{t-1} + 0{,}2 \cdot (2 - N_{t-1})$

$N_t = 0{,}6N_{t-1} + 0{,}4 - 0{,}2N_{t-1}$

$N_t = 0{,}4N_{t-1} + 0{,}4$ met $N(0) = 0{,}8$

$\overline{N} = \dfrac{0{,}8}{1 - 0{,}4} = \frac{2}{3}$

$N_t = \overline{N} + a^t \cdot (N_0 - \overline{N})$

$N_t = \frac{2}{3} + 0{,}4^t \cdot (0{,}8 - \frac{2}{3})$

$N_t = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0{,}4^t$

$R_t = 2 - N_t = 2 - (\frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0{,}4^t)$

$N_t = 1\frac{1}{3} - \frac{2}{15} \cdot 0{,}4^t$

c. voor grote waarden van *t* geldt: $N_t \to \frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0 = \frac{2}{3}$
dus $\frac{2}{3}$ miljoen

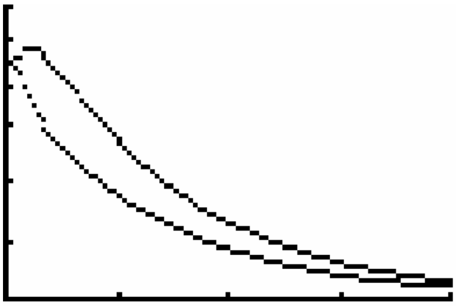
<u>Opgave 76:</u>

a. $J(t) = J(t-1) - 0{,}1J(t-1) - 0{,}06J(t-1) + 0{,}2V(t-1)$
$J(t) = 0{,}84J(t-1) + 0{,}2V(t-1)$ met $J(0) = 800$

b. $V_t = 0{,}88V(t-1) + 0{,}06J(t-1)$ met $V(0) = 1200$

c. er is geen sprake van een gesloten systeem

d.



e. kijk in de tabel
voor $t = 43$ geldt $J(43) = 403$ en $V(43) = 265$
voor $t = 44$ geldt $J(44) = 391$ en $V(44) = 257$
dus vanaf $t = 44$