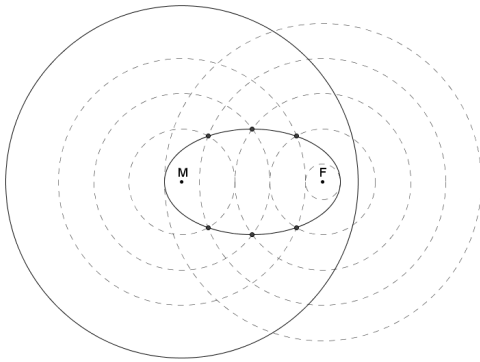


11.2 De ellips

Opgave 24:



Opgave 25:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2b$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2b$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2b - \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

$$x^2 + (y+c)^2 = 4b^2 - 4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + (y-c)^2$$

$$4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 4b^2 + (y-c)^2 - (y+c)^2$$

$$4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 4b^2 + y^2 - 2cy + c^2 - y^2 - 2cy - c^2$$

$$4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 4b^2 - 4cy$$

$$b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = b^2 - cy$$

$$b^2(x^2 + (y-c)^2) = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$$

$$b^2(x^2 + y^2 - 2cy + c^2) = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$$

$$b^2x^2 + b^2y^2 - 2b^2cy + b^2c^2 = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$$

$$b^2x^2 + b^2y^2 - c^2y^2 = b^4 - b^2c^2$$

$$b^2x^2 + (b^2 - c^2)y^2 = b^2(b^2 - c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Opgave 26:

voor een cirkel geldt: $d(P, M) = r$

dus $2d(P, M) = 2r$

dus $d(P, M) + d(P, M) = 2r$

dus een cirkel is een ellips waarbij beide brandpunten samenvallen met punt M

Opgave 27:

a. $a = 5$ $b = 3$ dus: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b. $a = 6$ $c = 5$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\text{dus } b^2 = a^2 - c^2$$

$$\text{dus } b^2 = 36 - 25 = 11$$

$$\text{dus } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

c. $b = 4 \quad c = 5$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 25 = 41$$

$$\text{dus } \frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$$

d. $a = 3$

$$\text{dus } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ door } (1,2)$$

$$\text{dus } \frac{1}{9} + \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\text{dus } \frac{4}{b^2} = \frac{8}{9}$$

$$8b^2 = 36$$

$$b^2 = 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4\frac{1}{2}} = 1$$

$$\text{dus } x^2 + 2y^2 = 9$$

e. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{dus } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ door } (2, \sqrt{2})$$

$$4b^2 + 2a^2 = a^2b^2$$

$$c = 3 \text{ en } c^2 = a^2 - b^2 \text{ geeft } a^2 - b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + 9$$

$$\text{dus } 4b^2 + 2(b^2 + 9) = (b^2 + 9)b^2$$

$$4b^2 + 2b^2 + 18 = b^4 + 9b^2$$

$$b^4 + 3b^2 - 18 = 0$$

$$(b^2 - 3)(b^2 + 6) = 0$$

$$b^2 = 3 \quad \vee \quad b^2 = -6 \text{ k.n.}$$

$$a^2 = b^2 + 9 = 3 + 9 = 12$$

$$\text{dus } \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\text{dus } x^2 + 4y^2 = 12$$

Opgave 28:

a. het andere brandpunt is het middelpunt van de richtcirkel, dus $(-3,0)$

de brandpunten zijn dus $(3,0)$ en $(-3,0)$

dus het middelpunt van de ellips is het midden van F_1F_2 , dus $(0,0)$

b. $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r = 10$

$$\text{ook geldt: } d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\text{dus } 2a = 10$$

$$\text{dus } a = 5$$

$$c = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$

$$b = 4$$

Opgave 29:

$$x^2 + y^2 - 8y - 84 = 0$$

$$x^2 + (y - 4)^2 - 16 - 84 = 0$$

$$x^2 + (y - 4)^2 = 100$$

dit is de richtcirkel, dus $M = (0, 4)$ en $r = 10$

$$d(P, F) + d(P, M) = r = 10$$

$$d(P, F) + d(P, M) = 2b$$

$$\text{dus } 2b = 10$$

$$b = 5$$

$$c = 4$$

$$c^2 = b^2 - a^2$$

$$a^2 = b^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\text{dus } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Opgave 30:

a. $a^2 = 10$ dus $(\sqrt{10}, 0)$ en $(-\sqrt{10}, 0)$

$$b^2 = 6 \text{ dus } (0, \sqrt{6}) \text{ en } (0, -\sqrt{6})$$

b. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$

links en rechts vermenigvuldigen met 30 geeft: $3x^2 + 5y^2 = 30$

c. $3x^2 + 5(2x - 3\frac{1}{2})^2 = 30$

$$3x^2 + 20x^2 - 70x + 61\frac{1}{4} = 30$$

$$23x^2 - 70x + 31\frac{1}{4} = 0$$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{2025}}{46} = \frac{70 \pm 45}{46}$$

$$x = \frac{70 + 45}{46} = 2\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{70 - 45}{46} = \frac{25}{46}$$

$$y = 1\frac{1}{2} \quad y = -2\frac{19}{46}$$

$$\text{dus } (2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}) \text{ en } (\frac{25}{46}, -2\frac{19}{46})$$

Opgave 31:

a. door $(1, 2)$ dus $p + 4q = 35$

door $(3, 1)$ dus $9p + q = 35$

$$p = -4q + 35$$

$$9(-4q + 35) + q = 35$$

$$-36q + 315 + q = 35$$

$$-35q = -270$$

$$q = 8$$

$$p = -4 \cdot 8 + 35 = 3$$

b. $3x^2 + 8y^2 = 35$

$$\frac{3x^2}{35} + \frac{8y^2}{35} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{35}{3}} + \frac{y^2}{\frac{35}{8}} = 1$$

dus $a^2 = \frac{35}{3}$ en $b^2 = \frac{35}{8}$

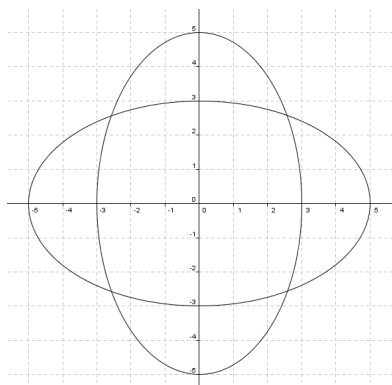
$$a^2 > b^2 \text{ dus } c^2 = a^2 - b^2 = \frac{35}{3} - \frac{35}{8} = \frac{175}{24}$$

$$c = \sqrt{\frac{175}{24}} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{7}{6}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{7 \cdot 6} = \frac{5}{12} \sqrt{42}$$

dus de brandpunten zijn $(\frac{5}{12} \sqrt{42}, 0)$ en $(-\frac{5}{12} \sqrt{42}, 0)$

Opgave 32:

a.



b. vervang x door $x - 5$ en y door $y - 6$

van $9x^2 + 25y^2 = 225$ zijn de toppen $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$

dus van $9(x - 5)^2 + 25(y - 6)^2 = 225$ zijn de toppen $(0, 6)$, $(10, 6)$, $(5, 9)$, $(5, 3)$

c. $25x^2 + 9y^2 = 225 \xrightarrow{T(5,6)} 25(x - 5)^2 + 9(y - 6)^2 = 225$

van $25x^2 + 9y^2 = 225$ zijn de toppen $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$ en de brandpunten $(0, 4)$ en $(0, -4)$

dus van $25(x - 5)^2 + 9(y - 6)^2 = 225$ zijn de toppen $(2, 6)$, $(8, 6)$, $(5, 11)$, $(5, 1)$ en de brandpunten $(5, 2)$ en $(5, 10)$

Opgave 33:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \text{ dus } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$b^2 > a^2 \text{ dus } c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$$

dus $c = \sqrt{5}$, dus de brandpunten zijn $(0, \sqrt{5})$ en $(0, -\sqrt{5})$

Opgave 34:

a. $5x^2 + y^2 = 5 \xrightarrow{T(2,-3)} 5(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

$5x^2 + y^2 = 5$ ofwel $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$ heeft als toppen: $(-1,0), (1,0), (0,-\sqrt{5}), (0,\sqrt{5})$

$b^2 > a^2$ dus $c^2 = b^2 - a^2 = 5 - 1 = 4$ dus $c = 2$, dus brandpunten $(0,-2)$ en $(0,2)$.

$5(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ heeft als toppen: $(1,-3), (3,-3), (2,-3-\sqrt{5}), (2,-3+\sqrt{5})$ en brandpunten $(2,-5)$ en $(2,-1)$

b. $4x^2 + 25y^2 + 16x - 84 = 0$

$4(x^2 + 4x) + 25y^2 = 84$

$4(x+2)^2 - 16 + 25y^2 = 84$

$4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$

$4x^2 + 25y^2 = 100 \xrightarrow{T(-2,0)} 4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$

$4x^2 + 25y^2 = 100$ ofwel $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ heeft als toppen $(-5,0), (5,0), (0,-2), (0,2)$

$a^2 > b^2$ dus $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$ dus $c = \sqrt{21}$, dus de brandpunten zijn $(-\sqrt{21},0)$ en $(\sqrt{21},0)$

$4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$ heeft als toppen: $(-7,0), (3,0), (-2,-2), (-2,2)$ en als brandpunten $(-2-\sqrt{21},0)$ en $(-2+\sqrt{21},0)$

c. $9x^2 + 10y^2 - 80y - 200 = 0$

$9x^2 + 10(y^2 - 8y) - 200 = 0$

$9x^2 + 10((y-4)^2 - 16) - 200 = 0$

$9x^2 + 10(y-4)^2 - 160 - 200 = 0$

$9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$

$9x^2 + 10y^2 = 360 \xrightarrow{T(0,4)} 9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$

$9x^2 + 10y^2 = 360$ ofwel $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$ heeft als toppen $(-2\sqrt{10},0), (2\sqrt{10},0), (0,-6), (0,6)$

$a^2 > b^2$ dus $c^2 = a^2 - b^2 = 40 - 36 = 4$, dus $c = 2$ dus de brandpunten zijn $(-2,0)$ en $(2,0)$

$9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$ heeft als toppen: $(-2\sqrt{10},4), (2\sqrt{10},4), (0,-2), (0,10)$ en als brandpunten $(-2,4)$ en $(2,4)$

d. $36x^2 + 11y^2 + 72x - 66y = 261$

$36(x^2 + 2x) + 11(y^2 - 6y) = 261$

$36((x+1)^2 - 1) + 11((y-3)^2 - 9) = 261$

$36(x+1)^2 - 36 + 11(y-3)^2 - 99 = 261$

$36(x+1)^2 + 11(y-3)^2 = 396$

$36x^2 + 11y^2 = 396 \xrightarrow{T(-1,3)} 36(x+1)^2 + 11(y-3)^2 = 396$

$36x^2 + 11y^2 = 396$ ofwel $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$ heeft als toppen $(-\sqrt{11},0), (\sqrt{11},0), (0,-6), (0,6)$

$b^2 > a^2$ dus $c^2 = b^2 - a^2 = 36 - 11 = 25$ dus $c = 5$ dus de brandpunten zijn $(0,-5)$ en $(0,5)$

$36(x+1)^2 + 11(y-3)^2 = 396$ heeft als toppen $(-1 - \sqrt{11}, 3), -1 + (\sqrt{11}, 3), (-1, 9), (-1, -3)$
 en als brandpunten $(-1, -2)$ en $(-1, 8)$

Opgave 35:

a. $16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y = 311$

$$16(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) = 311$$

$$16((x-2)^2 - 4) + 25((y+1)^2 - 1) = 311$$

$$16(x-2)^2 - 64 + 25(y+1)^2 - 25 = 311$$

$$16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 400$$

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \xrightarrow{T(2,-1)} 16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 400$$

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \text{ ofwel } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$a^2 > b^2 \text{ dus } c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \text{ dus } c = 3$$

brandpunten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$

dus $16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 400$ heeft als brandpunten $(-1, -1)$ en $(5, -1)$

lange as: $y = -1$

$$k: x = 5$$

k snijden met de ellips:

$$16(5-2)^2 + 25(y+1)^2 = 400$$

$$144 + 25(y+1)^2 = 400$$

$$25(y+1)^2 = 256$$

$$(y+1)^2 = \frac{256}{25}$$

$$y+1 = \frac{16}{5} \quad \vee \quad y+1 = -\frac{16}{5}$$

$$y = \frac{11}{5} \quad \vee \quad y = -\frac{21}{5}$$

$$AB = \frac{11}{5} - -\frac{21}{5} = \frac{32}{5}$$

b. $y_C = y_D = 0$

$$16x^2 - 64x = 311$$

$$16x^2 - 64x - 311 = 0$$

$$x = \frac{64 \pm \sqrt{24000}}{32} = \frac{64 \pm 40\sqrt{15}}{32}$$

$$x = 2 \pm 1\frac{1}{4}\sqrt{15}$$

$$CD = 2 + 1\frac{1}{4}\sqrt{15} - (2 - 1\frac{1}{4}\sqrt{15}) = 2\frac{1}{2}\sqrt{15}$$

c. $x = 0$

$$25y^2 + 50y = 311$$

$$25y^2 + 50y - 311 = 0$$

$$y = \frac{-50 \pm \sqrt{33600}}{50} = \frac{-50 \pm 40\sqrt{21}}{50}$$

$$y = -1 \pm \frac{4}{5}\sqrt{21}$$

$$\text{lengte koorde} = -1 + \frac{4}{5}\sqrt{21} - (-1 - \frac{4}{5}\sqrt{21}) = 1\frac{3}{5}\sqrt{21}$$

Opgave 36:

a. $10x^2 + ay^2 - 80x + 4ay + 160 - 6a = 0$

$$10(x^2 - 8x) + a(y^2 + 4y) + 160 - 6a = 0$$

$$10((x-4)^2 - 16) + a((y+2)^2 - 4) + 160 - 6a = 0$$

$$10(x-4)^2 - 160 + a(y+2)^2 - 4a + 160 - 6a = 0$$

$$10(x-4)^2 + a(y+2)^2 = 10a$$

$$\frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1 \xrightarrow{T(4,-2)} \frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1 \text{ heeft als toppen: } (-\sqrt{a}, 0), (\sqrt{a}, 0), (0, -\sqrt{10}), (0, \sqrt{10})$$

$$\frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1 \text{ heeft als toppen:}$$

$$(4 - \sqrt{a}, -2), 4 + (\sqrt{a}, -2), (4, -2 - \sqrt{10}), (4, -2 + \sqrt{10})$$

top = (7, -2)

$$4 - \sqrt{a} = 7 \quad \vee \quad 4 + \sqrt{a} = 7$$

$$-\sqrt{a} = 3 \quad \vee \quad \sqrt{a} = 3$$

k.n. $a = 9$

b. als $a > 10$ dan $c^2 = a - 10$ dus $c = \sqrt{a - 10}$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1 \text{ heeft als brandpunten } (\sqrt{a-10}, 0) \text{ en } (-\sqrt{a-10}, 0)$$

$$\text{dus } \frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1 \text{ heeft als brandpunten: } (4 + \sqrt{a-10}, -2) \text{ en } (4 - \sqrt{a-10}, -2)$$

$$4 + \sqrt{a-10} = 7 \quad \vee \quad 4 - \sqrt{a-10} = 7$$

$$\sqrt{a-10} = 3 \quad \vee \quad -\sqrt{a-10} = 3$$

$$a - 10 = 9 \quad \text{k.n.}$$

$$a = 19$$

c. als $a < 10$ dan $c^2 = 10 - a$ dus $c = \sqrt{10 - a}$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1 \text{ heeft als brandpunten } (0, \sqrt{10-a}) \text{ en } (0, -\sqrt{10-a})$$

$$\text{dus } \frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1 \text{ heeft als brandpunten } (4, -2 + \sqrt{10-a}) \text{ en } (4, -2 - \sqrt{10-a})$$

$$\text{brandpunt } (4, 0) \text{ dus } -2 + \sqrt{10-a} = 0$$

$$\sqrt{10-a} = 2$$

$$10 - a = 4$$

$$a = 6$$

Opgave 37:

a. $2^2 + 4 \cdot \sqrt{3}^2 = 4 + 4 \cdot 3 = 16$

b. punt P ligt op $y = \sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4}$

$$c. \quad y = \sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4} = \sqrt{u} \quad \text{met } u = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad \text{dus } u' = -\frac{1}{2}x$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4}} \cdot -\frac{1}{2}x = \frac{-x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4}} = -\frac{x}{4y}$$

$$rc = \frac{-2}{4\sqrt{3}} = \frac{-2}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{12} = -\frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$$y = -\frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot x + b \quad \text{door } (2, \sqrt{3})$$

$$\sqrt{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} + b$$

$$b = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$y = -\frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot x + 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$d. \quad y = -\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4} = -\sqrt{u} \quad \text{met } u = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad \text{dus } u' = -\frac{1}{2}x$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{-1}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4}} \cdot -\frac{1}{2}x = \frac{x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4}} = \frac{-x}{-4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4}} = -\frac{x}{4y}$$

Opgave 38:

$$a. \quad \text{als } y_A < 0 \quad \text{dan ligt } A \text{ op } y = -\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}$$

$$y = -\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2} = -\sqrt{u} \quad \text{met } u = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2 \quad \text{dus } u' = -\frac{2b^2}{a^2}x$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{-1}{2\sqrt{u}} \cdot -\frac{2b^2}{a^2}x = \frac{b^2x}{a^2 \cdot \sqrt{u}} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$k: \quad y - y_A = -\frac{b^2x_A}{a^2y_A}(x - x_A)$$

$$a^2y_A \cdot y - a^2y_A^2 = -b^2x_A \cdot x + b^2x_A^2$$

$$b^2x_A \cdot x + a^2y_A \cdot y = b^2x_A^2 + a^2y_A^2$$

$$b^2x_A \cdot x + a^2y_A \cdot y = a^2b^2$$

$$\frac{x_A \cdot x}{a^2} + \frac{y_A \cdot y}{b^2} = 1$$

$$b. \quad \text{als } y_A = 0 \quad \text{dan } \frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$$

$$\text{dus } x^2 = a^2$$

$$\text{dus } x = a \quad \vee \quad x = -a$$

de raakpunten zijn $(-a, 0)$ en $(a, 0)$, twee toppen van de ellips

$$\text{raaklijn in } (-a, 0) \text{ is: } \frac{-a \cdot x}{a^2} + \frac{0 \cdot y}{b^2} = 1 \quad \text{ofwel } x = -a$$

$$\text{raaklijn in } (a, 0) \text{ is: } \frac{a \cdot x}{a^2} + \frac{0 \cdot y}{b^2} = 1 \quad \text{ofwel } x = a$$

dus het klopt want in deze toppen is de raaklijn verticaal

Opgave 39:

$$a. \quad 2 \cdot 3x + 5 \cdot -y = 23$$

$$6x - 5y = 23$$

b. $\frac{4x}{18} + \frac{1y}{9} = 1$
 $2x + y = 9$

c. raaklijn k in $(2,5)$ is: $k: 7 \cdot 2x + 2 \cdot 5y = 78$
 $14x + 10y = 78$

$$\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{dus } \vec{n}_m = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

dus $m: 5x - 7y = c$ door $(2,5)$

$$m: 5x - 7y = -25$$

d. raaklijn l in $(3,2)$ is: $l: \frac{3x}{15} + \frac{2y}{10} = 1$
 $l: 3x + 3y = 15$

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dus } \vec{n}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dus $n: x - y = c$ door $(3,2)$

$$n: x - y = 1$$

Opgave 40:

a. stel het raakpunt is $A(x_A, y_A)$

dan is de raaklijn: $2x_A \cdot x + a^2 y_A \cdot y = 16$

de raaklijn is ook $x - y = 8$ ofwel $2x - 2y = 16$

$$\text{dus } \begin{cases} 2x_A = 2 \\ a^2 y_A = -2 \end{cases}$$

dus $x_A = 1$

hieruit volgt dat $y_A = -7$ (want A ligt op $x - y = 8$)

dus $-7a^2 = -2$

dus $a^2 = \frac{2}{7}$

b. stel het raakpunt is $A(x_A, y_A)$

dan is de raaklijn: $b^2 x_A \cdot x + 8y_A \cdot y = 88$

de raaklijn is ook $5x + 2y = 22$ ofwel $20x + 8y = 88$

$$\text{dus } \begin{cases} b^2 x_A = 20 \\ 8y_A = 8 \end{cases}$$

dus $y_A = 1$

hieruit volgt dat $x_A = 4$ (want A ligt op $5x + 2y = 22$)

dus $4b^2 = 20$

dus $b^2 = 5$

Opgave 41:

- a. raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is: $x_A \cdot x + 2y_A \cdot y = 18$
de raaklijn is ook $y = 2x + b$ ofwel $2x - y = -b$

$$\text{dus } \frac{x_A}{2} = \frac{2y_A}{-1} = \frac{18}{-b}$$

- b. uit $\frac{x_A}{2} = \frac{2y_A}{-1}$ volgt $-x_A = 4y_A$ dus $y_A = -\frac{1}{4}x_A$

invullen in de ellips geeft:

$$x_A^2 + 2\left(-\frac{1}{4}x_A\right)^2 = 18$$

$$x_A^2 + \frac{1}{8}x_A^2 = 18$$

$$\frac{9}{8}x_A^2 = 18$$

$$x_A^2 = 16$$

$$x_A = 4 \quad \vee \quad x_A = -4$$

$$y_A = -1 \quad y_A = 1$$

- c. als $x_A = 4$ dan $\frac{4}{2} = \frac{18}{-b}$ dus $b = -9$

$$\text{als } x_A = -4 \text{ dan } \frac{-4}{2} = \frac{18}{-b} \text{ dus } b = 9$$

Opgave 42:

- a. raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is: $2x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 38$
de raaklijn is ook: $y = -\frac{3}{5}x + b$ ofwel $3x + 5y = 5b$

$$\text{dus } \frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{5} = \frac{38}{5b}$$

$$\text{dus } 2x_A = 3y_A$$

$$\text{dus } x_A = 1\frac{1}{2}y_A$$

invullen in de ellips geeft:

$$2\left(1\frac{1}{2}y_A\right)^2 + 5y_A^2 = 38$$

$$4\frac{1}{2}y_A^2 + 5y_A^2 = 38$$

$$9\frac{1}{2}y_A^2 = 38$$

$$y_A^2 = 4$$

$$y_A = 2 \quad \vee \quad y_A = -2$$

$$x_A = 3 \quad x_A = -3$$

dus de raakpunten zijn: (3,2) en (-3,-2)

- b. dus voor de raaklijnen geldt: $rc = -\frac{1}{\frac{-5}{3}} = \frac{3}{5}$

dus de raaklijn is: $y = \frac{3}{5}x + b$ ofwel $3x - 5y = -5b$

$$\text{dus } \frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{-5}$$

$$\text{dus } 2x_A = -3y_A$$

$$\text{dus } x_A = -1\frac{1}{2}y_A$$

invullen in de ellips geeft:

$$2(-1\frac{1}{2}y_A)^2 + 5y_A^2 = 38$$

$$4\frac{1}{2}y_A^2 + 5y_A^2 = 38$$

$$9\frac{1}{2}y_A^2 = 38$$

$$y_A^2 = 4$$

$$y_A = 2 \quad \vee \quad y_A = -2$$

$$x_A = -3 \quad x_A = 3$$

dus de raakpunten zijn $(-3,2)$ en $(3,-2)$

Opgave 43:

a. raaklijn in $(-4,3)$ is: $3 \cdot -4x + 4 \cdot 3y = 84$

$$-12x + 12y = 84$$

$$x - y = -7$$

raaklijn in $(-1,-4\frac{1}{2})$ is: $3 \cdot -1x + 4 \cdot -4\frac{1}{2}y = 84$

$$-3x - 18y = 84$$

$$x + 6y = -28$$

$$\text{b. } \begin{cases} x - y = -7 \\ x + 6y = -28 \end{cases} -$$

$$-7y = 21$$

$$y = -3$$

$$x = -10$$

dus $P(-10,-3)$

c. $y - 3 = \frac{-4\frac{1}{2} - 3}{-1 - -4}(x - -4)$

$$y - 3 = -2\frac{1}{2}(x + 4)$$

$$y = 2\frac{1}{2}x - 7$$

d. $3 \cdot -10 \cdot x + 4 \cdot -3 \cdot y = 84$

$$-30x - 12y = 84$$

$$-12y = 30x + 84$$

$$y = -2\frac{1}{2}x - 7$$

Opgave 44:

a. lijn k gaat door punt $P(x_P, y_P)$ buiten de ellips en raakt de ellips in het punt $A(x_A, y_A)$

$$\text{dus } \frac{x_A \cdot x_P}{a^2} + \frac{y_A \cdot y_P}{b^2} = 1$$

lijn l gaat door punt $P(x_P, y_P)$ buiten de ellips en raakt de ellips in het punt $B(x_B, y_B)$

$$\text{dus } \frac{x_B \cdot x_P}{a^2} + \frac{y_B \cdot y_P}{b^2} = 1$$

zowel A als B liggen op de lijn $\frac{x_P \cdot x}{a^2} + \frac{y_P \cdot y}{b^2} = 1$ en dit is een vergelijking van de

poollijn van $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b. de poollijn van een punt $Q(x_Q, y_Q)$ ten opzichte van een ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is de

$$\text{lijn } \frac{x_Q \cdot x}{a^2} + \frac{y_Q \cdot y}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{T(x_M, y_M)} \frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$$

$$Q(x_Q, y_Q) \xrightarrow{T(x_M, y_M)} Q'(x_Q + x_M, y_Q + y_M) \text{ dus } x_P = x_Q + x_M \text{ en } y_P = y_Q + y_M$$

ofwel $x_Q = x_P - x_M$ en $y_Q = y_P - y_M$

$$\frac{x_Q \cdot x}{a^2} + \frac{y_Q \cdot y}{b^2} = 1 \xrightarrow{T(x_M, y_M)} \frac{x_Q \cdot (x - x_M)}{a^2} + \frac{y_Q \cdot (y - y_M)}{b^2} = 1$$

$$\text{dus de poollijn wordt: } \frac{(x_P - x_M)(x - x_M)}{a^2} + \frac{(y_P - y_M)(y - y_M)}{b^2} = 1$$

Opgave 45:

a. de poollijn van $A(8, -1)$ is $8x + 8 \cdot -1 \cdot y = 24$ ofwel $x - y = 3$ dus $x = y + 3$
de poollijn snijden met de ellips geeft:

$$(y + 3)^2 + 8y^2 = 24$$

$$y^2 + 6y + 9 + 8y^2 = 24$$

$$9y^2 + 6y - 15 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{576}}{18} = \frac{-6 \pm 24}{18}$$

$$y = 1 \quad \vee \quad y = -1\frac{2}{3}$$

$$x = 4 \quad x = 1\frac{1}{3}$$

raaklijn in $(4, 1)$ is: $4x + 8y = 24$ ofwel $x + 2y = 6$

raaklijn in $(1\frac{1}{3}, -1\frac{2}{3})$ is: $1\frac{1}{3}x + 8 \cdot -1\frac{2}{3}y = 24$ ofwel $x - 10y = 18$

b. k : $(5 - 1)(x - 1) + 2(-4 + 3)(y + 3) = 18$

$$4(x - 1) - 2(y + 3) = 18$$

$$4x - 4 - 2y - 6 = 18$$

$$4x - 2y = 28$$

$$2x - y = 14$$

c. $2x^2 + 5y^2 + 8x - 30y + 16 = 0$

$$2(x^2 + 4x) + 5(y^2 - 6y) + 16 = 0$$

$$2((x + 2)^2 - 4) + 5((y - 3)^2 - 9) + 16 = 0$$

$$2(x + 2)^2 - 8 + 5(y - 3)^2 - 45 + 16 = 0$$

$$2(x + 2)^2 + 5(y - 3)^2 = 37$$

raaklijn in $(-6, 4)$ is: $2(-6 + 2)(x + 2) + 5(4 - 3)(y - 3) = 37$

$$-8(x + 2) + 5(y - 3) = 37$$

$$-8x - 16 + 5y - 15 = 37$$

$$-8x + 5y = 68$$

Opgave 46:

- a. k : $4(-4-2)(x-2) + 9(6-4)(y-4) = 180$
 $-24(x-2) + 18(y-4) = 180$
 $-24x + 48 + 18y - 72 = 180$
 $-24x + 18y = 204$
 $4x - 3y = -34$
- b. raaklijn m in $(-1,8)$ is: $4(-1-2)(x-2) + 9(8-4)(y-4) = 180$
 $-12(x-2) + 36(y-4) = 180$
 $-12x + 24 + 36y - 144 = 180$
 $-12x + 36y = 300$
 $-x + 3y = 25$
- $\vec{n}_m = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dus $\vec{n}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 n : $3x + y = c$ door $(-1,8)$
 n : $3x + y = 5$

Opgave 47:

- a. $15x + 8y = 106$ vermenigvuldig alles met 2
 $30x + 16y = 212$
- b. de raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is de lijn: $5x_A \cdot x + 8y_A \cdot y = 212$
dus $5x_A = 30$ en $8y_A = 16$
dus $x_A = 6$ en $y_A = 2$
dus $A(6,2)$
- c. l : $55x + 52y = -106$
 $-110x - 104y = 212$
de raaklijn in $B(x_B, y_B)$ is de lijn $5x_B \cdot x + 8y_B \cdot y = 212$
dus $5x_B = -110$ en $8y_B = -104$
dus $x_B = -22$ en $y_B = -13$
dus $B(-22, -13)$

Opgave 48:

- a. k : $2 \cdot 8x + 3 \cdot -3y = 30$
 $16x - 9y = 30$
- b. de poellijn van B ten opzichte van de ellips is: $2 \cdot -6x + 3 \cdot -1y = 30$
dus $-12x - 3y = 30$
 $-3y = 12x + 30$
 $y = -4x - 10$
- de poellijn snijden met de ellips geeft:
 $2x^2 + 3(-4x - 10)^2 = 30$
 $2x^2 + 3(16x^2 + 80x + 100) = 30$
 $2x^2 + 48x^2 + 240x + 300 - 30 = 0$
 $50x^2 + 240x + 270 = 0$
 $5x^2 + 24x + 27 = 0$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{36}}{10} = \frac{-24 \pm 6}{10}$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = -1\frac{4}{5}$$

$$y = 2 \quad \vee \quad y = -2\frac{4}{5}$$

raaklijn in $(-3,2)$ is: $2 \cdot -3x + 3 \cdot 2y = 30$

$$-6x + 6y = 30$$

$$x - y = -5$$

raaklijn in $(-1\frac{4}{5}, -2\frac{4}{5})$ is: $2 \cdot -1\frac{4}{5}x + 3 \cdot -2\frac{4}{5}y = 30$

$$-3\frac{3}{5}x - 8\frac{2}{5}y = 30$$

$$3x + 7y = -25$$

c. $l: y = -1\frac{1}{5}x + 2$

$$1\frac{1}{5}x + y = 2$$

$$18x + 15y = 30$$

de poollijn van $C(x_C, y_C)$ is de lijn: $2x_C \cdot x + 3y_C \cdot y = 30$

dus $2x_C = 18$ en $3y_C = 15$

dus $x_C = 9$ en $y_C = 5$

dus $C(9,5)$

Opgave 49:

de poollijn van $P(5,1)$ ten opzichte van de ellips is:

$$p \cdot 5x + (1 - q)(y - q) = 52$$

$$5px + (1 - q)y - (1 - q)q = 52$$

$$5px + (1 - q)y = 52 + (1 - q)q$$

$$5px + (1 - q)y = 52 + q - q^2$$

de poollijn is ook de lijn $15x - 4y = 32$

dus $\frac{5p}{15} = \frac{1 - q}{-4} = \frac{52 + q - q^2}{32}$

dus $\frac{1 - q}{-4} = \frac{52 + q - q^2}{32}$

$$-4(52 + q - q^2) = 32(1 - q)$$

$$-208 - 4q + 4q^2 = 32 - 32q$$

$$4q^2 + 28q - 240 = 0$$

$$q^2 + 7q - 60 = 0$$

$$(q + 12)(q - 5) = 0$$

$$q = -12 \quad \vee \quad q = 5$$

$q = -12$ geeft $\frac{5p}{15} = \frac{13}{-4}$ dus $q = -\frac{39}{4}$

$q = 5$ geeft $\frac{5p}{15} = \frac{-4}{-4}$ dus $p = 3$