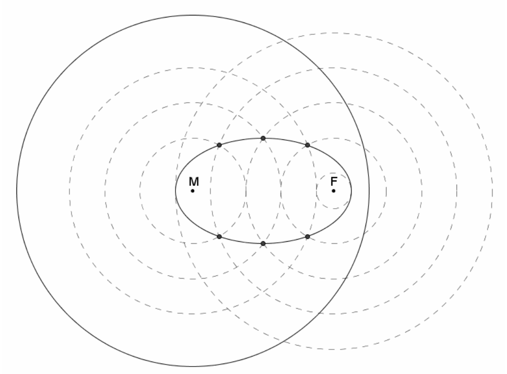
11.2 De ellips

Opgave 24:



Opgave 25:

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2b$

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b$

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2b-\sqrt{x^2+(y-c)^2}$

$x^2+(y+c)^2=4b^2-4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+(y-c)^2$

$4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}=4b^2+(y-c)^2-(y+c)^2$

$4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}=4b^2+y^2-2cy+c^2-y^2-2cy-c^2$

$4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}=4b^2-4cy$

$b\sqrt{x^2+(y-c)^2}=b^2-cy$

$b^2(x^2+(y-c)^2)=b^4-2b^2cy+c^2y^2$

$b^2(x^2+y^2-2cy+c^2)=b^4-2b^2cy+c^2y^2$

$b^2x^2+b^2y^2-2b^2cy+b^2c^2=b^4-2b^2cy+c^2y^2$

$b^2x^2+b^2y^2-c^2y^2=b^4-b^2c^2$

$b^2x^2+(b^2-c^2)y^2=b^2(b^2-c^2)$

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Opgave 26:

voor een cirkel geldt: $d(P,M)=r$

dus $2d(P,M)=2r$

dus $d(P,M)+d(P,M)=2r$

dus een cirkel is een ellips waarbij beide brandpunten samenvallen mat punt M

Opgave 27:

a. $a=5$ $b=3$ dus: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b. $a=6$ $c=5$

$c^2 = a^2 - b^2$
dus $b^2 = a^2 - c^2$
dus $b^2 = 36 - 25 = 11$
dus $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{11} = 1$

c. $b = 4 \quad c = 5$
$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 25 = 41$
dus $\dfrac{x^2}{41} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

d. $a = 3$
dus $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ door $(1,2)$
dus $\dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{b^2} = 1$
dus $\dfrac{4}{b^2} = \dfrac{8}{9}$
$8b^2 = 36$
$b^2 = 4\tfrac{1}{2}$
$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4\frac{1}{2}} = 1$
dus $x^2 + 2y^2 = 9$

e. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
dus $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ door $(2, \sqrt{2})$
$4b^2 + 2a^2 = a^2b^2$
$c = 3$ en $c^2 = a^2 - b^2$ geeft $a^2 - b^2 = 9$
$a^2 = b^2 + 9$
dus $4b^2 + 2(b^2 + 9) = (b^2 + 9)b^2$
$4b^2 + 2b^2 + 18 = b^4 + 9b^2$
$b^4 + 3b^2 - 18 = 0$
$(b^2 - 3)(b^2 + 6) = 0$
$b^2 = 3 \quad \vee \quad b^2 = -6$ k.n.
$a^2 = b^2 + 9 = 3 + 9 = 12$
dus $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{3} = 1$
dus $x^2 + 4y^2 = 12$

Opgave 28:

a. het andere brandpunt is het middelpunt van de richtcirkel, dus $(-3,0)$
de brandpunten zijn dus $(3,0)$ en $(-3,0)$
dus het middelpunt van de ellips is het midden van F_1F_2 , dus $(0,0)$

b. $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r = 10$

ook geldt: $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$
dus $2a=10$
dus $a=5$
$c=3$
$c^2=a^2-b^2$
$b^2=a^2-c^2=25-9=16$
$b=4$

Opgave 29:
$x^2+y^2-8y-84=0$
$x^2+(y-4)^2-16-84=0$
$x^2+(y-4)^2=100$
dit is de richtcirkel, dus $M=(0,4)$ en $r=10$
$d(P,F)+d(P,M)=r=10$
$d(P,F)+d(P,M)=2b$
dus $2b=10$
$b=5$
$c=4$
$c^2=b^2-a^2$
$a^2=b^2-c^2=25-16=9$
dus $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

Opgave 30:
a. $a^2=10$ dus $(\sqrt{10},0)$ en $(-\sqrt{10},0)$
$b^2=6$ dus $(0,\sqrt{6})$ en $(0,-\sqrt{6})$
b. $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$
links en rechts vermenigvuldigen met 30 geeft: $3x^2+5y^2=30$
c. $3x^2+5(2x-3\tfrac{1}{2})^2=30$
$3x^2+20x^2-70x+61\tfrac{1}{4}=30$
$23x^2-70x+31\tfrac{1}{4}=0$
$x=\frac{70\pm\sqrt{2025}}{46}=\frac{70\pm 45}{46}$
$x=\frac{70+45}{46}=2\tfrac{1}{2} \quad \vee \quad x=\frac{70-45}{46}=\frac{25}{46}$
$y=1\tfrac{1}{2} \qquad y=-2\tfrac{19}{46}$
dus $(2\tfrac{1}{2},1\tfrac{1}{2})$ en $(\tfrac{25}{46},-2\tfrac{19}{46})$

Opgave 31:
a. door $(1,2)$ dus $p+4q=35$
door $(3,1)$ dus $9p+q=35$
$p=-4q+35$

$$9(-4q+35)+q=35$$
$$-36q+315+q=35$$
$$-35q=-270$$
$$q=8$$
$$p=-4\cdot 8+35=3$$

b. $3x^2+8y^2=35$

$$\frac{3x^2}{35}+\frac{8y^2}{35}=1$$
$$\frac{x^2}{\frac{35}{3}}+\frac{y^2}{\frac{35}{8}}=1$$

dus $a^2=\frac{35}{3}$ en $b^2=\frac{35}{8}$

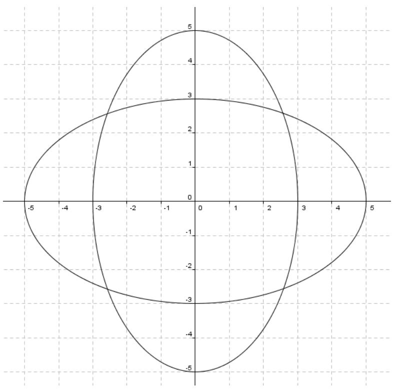
$a^2>b^2$ dus $c^2=a^2-b^2=\frac{35}{3}-\frac{35}{8}=\frac{175}{24}$

$c=\sqrt{\frac{175}{24}}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{7\cdot 6}=\frac{5}{12}\sqrt{42}$

dus de brandpunten zijn $(\frac{5}{12}\sqrt{42},0)$ en $(-\frac{5}{12}\sqrt{42},0)$

Opgave 32:

a.



b. vervang x door $x-5$ en y door $y-6$

van $9x^2+25y^2=225$ zijn de toppen $(-5,0)$, $(5,0)$, $(0,3)$, $(0,-3)$

dus van $9(x-5)^2+25(y-6)^2=225$ zijn de toppen $(0,6)$, $(10,6)$, $(5,9)$, $(5,3)$

c. $25x^2+9y^2=225 \xrightarrow{T(5,6)} 25(x-5)^2+9(y-6)^2=225$

van $25x^2+9y^2=225$ zijn de toppen $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,5)$, $(0,-5)$ en de brandpunten $(0,4)$ en $(0,-4)$

dus van $25(x-5)^2+9(y-6)^2=225$ zijn de toppen $(2,6)$, $(8,6)$, $(5,11)$, $(5,1)$ en de brandpunten $(5,2)$ en $(5,10)$

Opgave 33:

$9x^2+4y^2=36$ dus $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$b^2>a^2$ dus $c^2=b^2-a^2=9-4=5$

dus $c=\sqrt{5}$, dus de brandpunten zijn $(0,\sqrt{5})$ en $(0,-\sqrt{5})$

Opgave 34:

a. $5x^2+y^2=5 \xrightarrow{T(2,-3)} 5(x-2)^2+(y+3)^2=5$

$5x^2+y^2=5$ ofwel $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{5}=1$ heeft als toppen: $(-1,0),(1,0),(0,-\sqrt{5}),(0,\sqrt{5})$

$b^2>a^2$ dus $c^2=b^2-a^2=5-1=4$ dus $c=2$, dus brandpunten $(0,-2)$ en $(0,2)$.

$5(x-2)^2+(y+3)^2=5$ heeft als toppen: $(1,-3),(3,-3),(2,-3-\sqrt{5}),(2,-3+\sqrt{5})$ en brandpunten $(2,-5)$ en $(2,-1)$

b. $4x^2+25y^2+16x-84=0$

$4(x^2+4x)+25y^2=84$

$4(x+2)^2-16+25y^2=84$

$4(x+2)^2+25y^2=100$

$4x^2+25y^2=100 \xrightarrow{T(-2,0)} 4(x+2)^2+25y^2=100$

$4x^2+25y^2=100$ ofwel $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ heeft als toppen $(-5,0),(5,0),(0,-2),(0,2)$

$a^2>b^2$ dus $c^2=a^2-b^2=25-4=21$ dus $c=\sqrt{21}$, dus de brandpunten zijn $(-\sqrt{21},0)$ en $(\sqrt{21},0)$

$4(x+2)^2+25y^2=100$ heeft als toppen: $(-7,0),(3,0),(-2,-2),(-2,2)$ en als brandpunten $(-2-\sqrt{21},0)$ en $(-2+\sqrt{21},0)$

c. $9x^2+10y^2-80y-200=0$

$9x^2+10(y^2-8y)-200=0$

$9x^2+10((y-4)^2-16)-200=0$

$9x^2+10(y-4)^2-160-200=0$

$9x^2+10(y-4)^2=360$

$9x^2+10y^2=360 \xrightarrow{T(0,4)} 9x^2+10(y-4)^2=360$

$9x^2+10y^2=360$ ofwel $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$ heeft als toppen $(-2\sqrt{10},0),(2\sqrt{10},0),(0,-6),(0,6)$

$a^2>b^2$ dus $c^2=a^2-b^2=40-36=4$, dus $c=2$ dus de brandpunten zijn $(-2,0)$ en $(2,0)$

$9x^2+10(y-4)^2=360$ heeft als toppen: $(-2\sqrt{10},4),(2\sqrt{10},4),(0,-2),(0,10)$ en als brandpunten $(-2,4)$ en $(2,4)$

d. $36x^2+11y^2+72x-66y=261$

$36(x^2+2x)+11(y^2-6y)=261$

$36((x+1)^2-1)+11((y-3)^2-9)=261$

$36(x+1)^2-36+11(y-3)^2-99=261$

$36(x+1)^2+11(y-3)^2=396$

$36x^2+11y^2=396 \xrightarrow{T(-1,3)} 36(x+1)^2+11(y-3)^2=396$

$36x^2+11y^2=396$ ofwel $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1$ heeft als toppen $(-\sqrt{11},0),(\sqrt{11},0),(0,-6),(0,6)$

$b^2>a^2$ dus $c^2=b^2-a^2=36-11=25$ dus $c=5$ dus de brandpunten zijn $(0,-5)$ en $(0,5)$

$36(x+1)^2+11(y-3)^2=396$ heeft als toppen $(-1-\sqrt{11},3)$, $-1+(\sqrt{11},3)$, $(-1,-9)$, $(-1,3)$ en als brandpunten $(-1,-2)$ en $(-1,8)$

Opgave 35:

a. $16x^2+25y^2-64x+50y=311$

$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$

$16((x-2)^2-4)+25((y+1)^2-1)=311$

$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$

$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$

$16x^2+25y^2=400 \xrightarrow{T(2,-1)} 16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$

$16x^2+25y^2=400$ ofwel $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$a^2>b^2$ dus $c^2=a^2-b^2=25-16=9$ dus $c=3$

brandpunten $(-,3,0)$ en $(3,0)$

dus $16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$ heeft als brandpunten $(-1,-1)$ en $(5,-1)$

lange as: $y=-1$

$k:\quad x=5$

k snijden met de ellips:

$16(5-2)^2+25(y+1)^2=400$

$144+25(y+1)^2=400$

$25(y+1)^2=256$

$(y+1)^2=\frac{256}{25}$

$y+1=\frac{16}{5} \quad \vee \quad y+1=-\frac{16}{5}$

$y=\frac{11}{5} \quad \vee \quad y=-\frac{21}{5}$

$AB=\frac{11}{5}--\frac{21}{5}=\frac{32}{5}$

b. $y_C=y_D=0$

$16x^2-64x=311$

$16x^2-64x-311=0$

$x=\dfrac{64\pm\sqrt{24000}}{32}=\dfrac{64\pm40\sqrt{15}}{32}$

$x=2\pm1\frac{1}{4}\sqrt{15}$

$CD=2+1\frac{1}{4}\sqrt{15}-(2-1\frac{1}{4}\sqrt{15})=2\frac{1}{2}\sqrt{15}$

c. $x=0$

$25y^2+50y=311$

$25y^2+50y-311=0$

$y=\dfrac{-50\pm\sqrt{33600}}{50}=\dfrac{-50\pm40\sqrt{21}}{50}$

$y=-1\pm\frac{4}{5}\sqrt{21}$

lengte koorde $=-1+\frac{4}{5}\sqrt{21}-(-1-\frac{4}{5}\sqrt{21})=1\frac{3}{5}\sqrt{21}$

Opgave 36:

a. $10x^2 + ay^2 - 80x + 4ay + 160 - 6a = 0$

$10(x^2 - 8x) + a(y^2 + 4y) + 160 - 6a = 0$

$10((x-4)^2 - 16) + a((y+2)^2 - 4) + 160 - 6a = 0$

$10(x-4)^2 - 160 + a(y+2)^2 - 4a + 160 - 6a = 0$

$10(x-4)^2 + a(y+2)^2 = 10a$

$$\frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1 \xrightarrow{T(4,-2)} \frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$$

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1$ heeft als toppen: $(-\sqrt{a},0), (\sqrt{a},0), (0,-\sqrt{10}), (0,\sqrt{10})$

$\frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$ heeft als toppen:

$(4-\sqrt{a},-2), 4+(\sqrt{a},-2), (4,-2-\sqrt{10}), (4,-2+\sqrt{10})$

top$=(7,-2)$

$4-\sqrt{a} = 7 \quad \vee \quad 4+\sqrt{a} = 7$

$-\sqrt{a} = 3 \quad \vee \quad \sqrt{a} = 3$

k.n. $\quad a = 9$

b. als $a > 10$ dan $c^2 = a - 10$ dus $c = \sqrt{a-10}$

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1$ heeft als brandpunten $(\sqrt{a-10},0)$ en $(-\sqrt{a-10},0)$

dus $\frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$ heeft als brandpunten: $(4+\sqrt{a-10},-2)$ en $(4-\sqrt{a-10},-2)$

$4+\sqrt{a-10} = 7 \quad \vee \quad 4-\sqrt{a-10} = 7$

$\sqrt{a-10} = 3 \quad \vee \quad -\sqrt{a-10} = 3$

$a - 10 = 9 \quad$ k.n.

$a = 19$

c. als $a < 10$ dan $c^2 = 10 - a$ dus $c = \sqrt{10-a}$

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1$ heeft als brandpunten $(0,\sqrt{10-a})$ en $(0,-\sqrt{10-a})$

dus $\frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$ heeft als brandpunten $(4,-2+\sqrt{10-a})$ en $(4,2-\sqrt{10-a})$

brandpunt $(4,0)$ dus $-2+\sqrt{10-a} = 0$

$\sqrt{10-a} = 2$

$10 - a = 4$

$a = 6$

Opgave 37:

a. $2^2 + 4 \cdot \sqrt{3}^2 = 4 + 4 \cdot 3 = 16$

b. punt P ligt op $y = \sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 4}$

c. $y=\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}=\sqrt{u}$ met $u=-\frac{1}{4}x^2+4$ dus $u'=-\frac{1}{2}x$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}\cdot -\tfrac{1}{2}x=\frac{-x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}=-\frac{x}{4y}$$

$$rc=\frac{-2}{4\sqrt{3}}=\frac{-2}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{12}=-\tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$

$y=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot x+b$ door $(2,\sqrt{3})$

$\sqrt{3}=-\frac{1}{3}\sqrt{3}+b$

$b=1\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$y=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot x+1\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d. $y=-\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}=-\sqrt{u}$ met $u=-\frac{1}{4}x^2$ dus $u'=-\frac{1}{2}x$

$$y'=\frac{-1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{-1}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}\cdot -\tfrac{1}{2}x=\frac{x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}=\frac{-x}{-4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}=-\frac{x}{4y}$$

Opgave 38:

a. als $y_A<0$ dan ligt A op $y=-\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2+b^2}$

$y=-\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2+b^2}=-\sqrt{u}$ met $u=-\frac{b^2}{a^2}x^2+b^2$ dus $u'=-\frac{2b^2}{a^2}x$

$$y'=\frac{-1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{-1}{2\sqrt{u}}\cdot -\tfrac{2b^2}{a^2}x=\frac{b^2x}{a^2\cdot\sqrt{u}}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

$k:\quad y-y_A=-\dfrac{b^2x_A}{a^2y_A}(x-x_A)$

$a^2y_A\cdot y-a^2{y_A}^2=-b^2x_A\cdot x+b^2{x_A}^2$

$b^2x_A\cdot x+a^2y_A\cdot y=b^2{x_A}^2+a^2{y_A}^2$

$b^2x_A\cdot x+a^2y_A\cdot y=a^2b^2$

$\dfrac{x_A\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_A\cdot y}{b^2}=1$

b. als $y_A=0$ dan $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{0^2}{b^2}=1$

dus $x^2=a^2$

dus $x=a \quad\vee\quad x=-a$

de raakpunten zijn $(-a,0)$ en $(a,0)$, twee toppen van de ellips

raaklijn in $(-a,0)$ is: $\dfrac{-a\cdot x}{a^2}+\dfrac{0\cdot y}{b^2}=1$ ofwel $x=-a$

raaklijn in $(a,0)$ is: $\dfrac{a\cdot x}{a^2}+\dfrac{0\cdot y}{b^2}=1$ ofwel $x=a$

dus het klopt want in deze toppen is de raaklijn verticaal

Opgave 39:

a. $2\cdot 3x+5\cdot -y=23$

$6x-5y=23$

b. $\frac{4x}{18} + \frac{1y}{9} = 1$

$2x + y = 9$

c. raaklijn k in $(2,5)$ is: $k: \quad 7 \cdot 2x + 2 \cdot 5y = 78$

$14x + 10y = 78$

$\overrightarrow{n_k} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

dus $\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

dus $m: \quad 5x - 7y = c$ door $(2,5)$

$m: \quad 5x - 7y = -25$

d. raaklijn l in $(3,2)$ is: $l: \quad \frac{3x}{15} + \frac{2y}{10} = 1$

$l: \quad 3x + 3y = 15$

$\overrightarrow{n_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

dus $\overrightarrow{n_n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

dus $n: \quad x - y = c$ door $(3,2)$

$n: \quad x - y = 1$

Opgave 40:

a. stel het raakpunt is $A(x_A, y_A)$

dan is de raaklijn: $2x_A \cdot x + a^2 y_A \cdot y = 16$

de raaklijn is ook $x - y = 8$ ofwel $2x - 2y = 16$

dus $\begin{cases} 2x_A = 2 \\ a^2 y_A = -2 \end{cases}$

dus $x_A = 1$

hieruit volgt dat $y_A = -7$ (want A ligt op $x - y = 8$)

dus $-7a^2 = -2$

dus $a^2 = \frac{2}{7}$

b. stel het raakpunt is $A(x_A, y_A)$

dan is de raaklijn: $b^2 x_A \cdot x + 8y_A \cdot y = 88$

de raaklijn is ook $5x + 2y = 22$ ofwel $20x + 8y = 88$

dus $\begin{cases} b^2 x_A = 20 \\ 8y_A = 8 \end{cases}$

dus $y_A = 1$

hieruit volgt dat $x_A = 4$ (want A ligt op $5x + 2y = 22$)

dus $4b^2 = 20$

dus $b^2 = 5$

Opgave 41:

a. raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is: $x_A \cdot x + 2y_A \cdot y = 18$

de raaklijn is ook $y = 2x + b$ ofwel $2x - y = -b$

dus $\frac{x_A}{2} = \frac{2y_A}{-1} = \frac{18}{-b}$

b. uit $\frac{x_A}{2} = \frac{2y_A}{-1}$ volgt $-x_A = 4y_A$ dus $y_A = -\frac{1}{4}x_A$

invullen in de ellips geeft:

$x_A^{\ 2} + 2(-\frac{1}{4}x_A)^2 = 18$

$x_A^{\ 2} + \frac{1}{8}x_A^{\ 2} = 18$

$\frac{9}{8}x_A^{\ 2} = 18$

$x_A^{\ 2} = 16$

$x_A = 4 \quad \vee \quad x_A = -4$

$y_A = -1 \qquad y_A = 1$

c. als $x_A = 4$ dan $\frac{4}{2} = \frac{18}{-b}$ dus $b = -9$

als $x_A = -4$ dan $\frac{-4}{2} = \frac{18}{-b}$ dus $b = 9$

Opgave 42:

a. raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is: $2x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 38$

de raaklijn is ook: $y = -\frac{3}{5}x + b$ ofwel $3x + 5y = 5b$

dus $\frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{5} = \frac{38}{5b}$

dus $2x_A = 3y_A$

dus $x_A = 1\frac{1}{2}y_A$

invullen in de ellips geeft:

$2(1\frac{1}{2}y_A)^2 + 5y_A^{\ 2} = 38$

$4\frac{1}{2}y_A^{\ 2} + 5y_A^{\ 2} = 38$

$9\frac{1}{2}y_A^{\ 2} = 38$

$y_A^{\ 2} = 4$

$y_A = 2 \quad \vee \quad y_A = -2$

$x_A = 3 \qquad x_A = -3$

dus de raakpunten zijn: $(3,2)$ en $(-3,-2)$

b. dus voor de raaklijnen geldt: $rc = -\frac{1}{\frac{-5}{3}} = \frac{3}{5}$

dus de raaklijn is: $y = \frac{3}{5}x + b$ ofwel $3x - 5y = -5b$

dus $\frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{-5}$

dus $2x_A = -3y_A$

dus $x_A = -1\frac{1}{2}y_A$

invullen in de ellips geeft:

$2(-1\frac{1}{2}y_A)^2+5{y_A}^2=38$

$4\frac{1}{2}{y_A}^2+5{y_A}^2=38$

$9\frac{1}{2}{y_A}^2=38$

${y_A}^2=4$

$y_A=2 \quad \vee \quad y_A=-2$

$x_A=-3 \qquad x_A=3$

dus de raakpunten zijn $(-3,2)$ en $(3,-2)$

Opgave 43:

a. raaklijn in $(-4,3)$ is: $3\cdot -4x+4\cdot 3y=84$

$-12x+12y=84$

$x-y=-7$

raaklijn in $(-1,-4\frac{1}{2})$ is: $3\cdot -1x+4\cdot -4\frac{1}{2}y=84$

$-3x-18y=84$

$x+6y=-28$

b. $\begin{cases} x-y=-7 \\ x+6y=-28 \quad - \end{cases}$

$-7y=21$

$y=-3$

$x=-10$

dus $P(-10,-3)$

c. $y-3=\frac{-4\frac{1}{2}-3}{-1--4}(x--4)$

$y-3=-2\frac{1}{2}(x+4)$

$y=2\frac{1}{2}x-7$

d. $3\cdot -10\cdot x+4\cdot -3\cdot y=84$

$-30x-12y=84$

$-12y=30x+84$

$y=-2\frac{1}{2}x-7$

Opgave 44:

a. lijn *k* gaat door punt $P(x_P,y_P)$ buiten de ellips en raakt de ellips in het punt $A(x_A,y_A)$

dus $\frac{x_A\cdot x_P}{a^2}+\frac{y_A\cdot y_P}{b^2}=1$

lijn *l* gaat door punt $P(x_P,y_P)$ buiten de ellips en raakt de ellips in het punt $B(x_B,y_B)$

dus $\frac{x_B\cdot x_P}{a^2}+\frac{y_B\cdot y_P}{b^2}=1$

zowel *A* als *B* liggen op de lijn $\frac{x_P\cdot x}{a^2}+\frac{y_P\cdot y}{b^2}=1$ en dit is een vergelijking van de poollijn van $P(x_P,y_P)$ ten opzichte van de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

b. de poollijn van een punt $Q(x_Q, y_Q)$ ten opzichte van een ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ is de lijn $\frac{x_Q \cdot x}{a^2}+\frac{y_Q \cdot y}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{T(x_M, y_M)} \frac{(x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$Q(x_Q, y_Q) \xrightarrow{T(x_M, y_M)} Q'(x_Q+x_M, y_Q+y_M)$ dus $x_P=x_Q+x_M$ en $y_P=y_Q+y_M$

ofwel $x_Q=x_P-x_M$ en $y_Q=y_P-y_M$

$$\frac{x_Q \cdot x}{a^2}+\frac{y_Q \cdot y}{b^2}=1 \xrightarrow{T(x_M, y_M)} \frac{x_Q \cdot (x-x_M)}{a^2}+\frac{y_Q \cdot (y-y_M)}{b^2}=1$$

dus de poollijn wordt: $\frac{(x_P-x_M)(x-x_M)}{a^2}+\frac{(y_P-y_M)(y-y_M)}{b^2}=1$

Opgave 45:

a. de poollijn van $A(8,-1)$ is $8x+8\cdot -1\cdot y=24$ ofwel $x-y=3$ dus $x=y+3$

de poollijn snijden met de ellips geeft:

$(y+3)^2+8y^2=24$

$y^2+6y+9+8y^2=24$

$9y^2+6y-15=0$

$y=\frac{-6\pm\sqrt{576}}{18}=\frac{-6\pm 24}{18}$

$y=1 \quad \vee \quad y=-1\frac{2}{3}$

$x=4 \qquad x=1\frac{1}{3}$

raaklijn in $(4,1)$ is: $4x+8y=24$ ofwel $x+2y=6$

raaklijn in $(1\frac{1}{3},-1\frac{2}{3})$ is: $1\frac{1}{3}x+8\cdot -1\frac{2}{3}y=24$ ofwel $x-10y=18$

b. $k:\quad (5-1)(x-1)+2(-4+3)(y+3)=18$

$4(x-1)-2(y+3)=18$

$4x-4-2y-6=18$

$4x-2y=28$

$2x-y=14$

c. $2x^2+5y^2+8x-30y+16=0$

$2(x^2+4x)+5(y^2-6y)+16=0$

$2((x+2)^2-4)+5((y-3)^2-9)+16=0$

$2(x+2)^2-8+5(y-3)^2-45+16=0$

$2(x+2)^2+5(y-3)^2=37$

raaklijn in $(-6,4)$ is: $2(-6+2)(x+2)+5(4-3)(y-3)=37$

$-8(x+2)+5(y-3)=37$

$-8x-16+5y-15=37$

$-8x+5y=68$

Opgave 46:

a. $k: \quad 4(-4-2)(x-2)+9(6-4)(y-4)=180$

$-24(x-2)+18(y-4)=180$

$-24x+48+18y-72=180$

$-24x+18y=204$

$4x-3y=-34$

b. raaklijn m in $(-1{,}8)$ is: $4(-1-2)(x-2)+9(8-4)(y-4)=180$

$-12(x-2)+36(y-4)=180$

$-12x+24+36y-144=180$

$-12x+36y=300$

$-x+3y=25$

$\overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$n: \quad 3x+y=c$ door $(-1{,}8)$

$n: \quad 3x+y=5$

Opgave 47:

a. $15x+8y=106$ vermenigvuldig alles met 2

$30x+16y=212$

b. de raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is de lijn: $5x_A \cdot x+8y_A \cdot y=212$

dus $5x_A=30$ en $8y_A=16$

dus $x_A=6$ en $y_A=2$

dus $A(6{,}2)$

c. $l: \quad 55x+52y=-106$

$-110x-104y=212$

de raaklijn in $B(x_B, y_B)$ is de lijn $5x_B \cdot x+8y_B \cdot y=212$

dus $5x_B=-110$ en $8y_B=-104$

dus $x_B=-22$ en $y_B=-13$

dus $B(-22,-13)$

Opgave 48:

a. $k: \quad 2\cdot 8x+3\cdot -3y=30$

$16x-9y=30$

b. de poollijn van B ten opzichte van de ellips is: $2\cdot -6x+3\cdot -1y=30$

dus $-12x-3y=30$

$-3y=12x+30$

$y=-4x-10$

de poollijn snijden met de ellips geeft:

$2x^2+3(-4x-10)^2=30$

$2x^2+3(16x^2+80x+100)=30$

$2x^2+48x^2+240x+300-30=0$

$50x^2+240x+270=0$

$5x^2+24x+27=0$

$x = \frac{-24 \pm \sqrt{36}}{10} = \frac{-24 \pm 6}{10}$

$x = -3 \quad \vee \quad x = -1\frac{4}{5}$

$y = 2 \qquad\quad y = -2\frac{4}{5}$

raaklijn in $(-3,2)$ is: $2 \cdot -3x + 3 \cdot 2y = 30$

$-6x + 6y = 30$

$x - y = -5$

raaklijn in $(-1\frac{4}{5}, -2\frac{4}{5})$ is: $2 \cdot -1\frac{4}{5}x + 3 \cdot -2\frac{4}{5}y = 30$

$-3\frac{3}{5}x - 8\frac{2}{5}y = 30$

$3x + 7y = -25$

c. $l: \quad y = -1\frac{1}{5}x + 2$

$1\frac{1}{5}x + y = 2$

$18x + 15y = 30$

de poollijn van $C(x_C, y_C)$ is de lijn: $2x_C \cdot x + 3y_C \cdot y = 30$

dus $2x_C = 18$ en $3y_C = 15$

dus $x_C = 9$ en $y_C = 5$

dus $C(9,5)$

Opgave 49:

de poollijn van $P(5,1)$ ten opzichte van de ellips is:

$p \cdot 5x + (1-q)(y-q) = 52$

$5px + (1-q)y - (1-q)q = 52$

$5px + (1-q)y = 52 + (1-q)q$

$5px + (1-q)y = 52 + q - q^2$

de poollijn is ook de lijn $15x - 4y = 32$

dus $\frac{5p}{15} = \frac{1-q}{-4} = \frac{52+q-q^2}{32}$

dus $\frac{1-q}{-4} = \frac{52+q-q^2}{32}$

$-4(52 + q - q^2) = 32(1-q)$

$-208 - 4q + 4q^2 = 32 - 32q$

$4q^2 + 28q - 240 = 0$

$q^2 + 7q - 60 = 0$

$(q+12)(q-5) = 0$

$q = -12 \quad \vee \quad q = 5$

$q = -12$ geeft $\frac{5p}{15} = \frac{13}{-4}$ dus $q = -\frac{39}{4}$

$q = 5$ geeft $\frac{5p}{15} = \frac{-4}{-4}$ dus $p = 3$