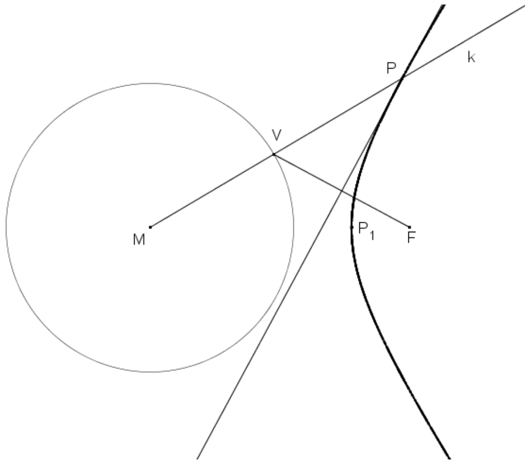
11.3 De hyperbool

Opgave 50:

a.



b. voor ieder punt P op de middelloodlijn van FV geldt: $d(P,F) = d(P,V)$
punt V ligt op de cirkel c , dus $d(P,V) = d(P,c)$
dus $d(P,F) = d(P,c)$
dus punt P ligt op de conflictlijn van punt F en cirkel c

Opgave 51:

a. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$

$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$(cx - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

b. lijnstuk F_1F_2 heeft lengte $2c$
lijnstuk F_1F_2 snijdt de hyperbool in de punten A en B
lijnstuk AB heeft lengte $2a$
dus $2c > 2a$
dus $c > a$
dus $c^2 - a^2 = b^2$

c. stel $P(-x, y)$
P ligt op de hyperbool dus geldt: $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$

$\sqrt{(-x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(-x-c)^2 + y^2} = 2a$

$$\sqrt{(-x+c)^2+y^2}=\sqrt{(-x-c)^2+y^2}+2a$$
$$(-x+c)^2+y^2=(-x-c)^2+y^2+4a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}+4a^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2+4a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}+4a^2$$
$$-4cx-4a^2=4a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}$$
$$cx+a^2=-a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}$$
$$(cx+a^2)^2=a^2((-x-c)^2+y^2$$
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$
stel $b^2=c^2-a^2$
dus $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$
dus $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Opgave 52:
voor het punt B op de hyperbool geldt: $d(B,F_1)-d(B,F_2)=2b+AF_1-BF_2=2b$
voor ieder punt P op de bovenste tak van de hyperbool geldt: $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2b$
$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}-\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b$$
$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=\sqrt{x^2+(y-c)^2}+2b$$
$$x^2+(y+c)^2=x^2+(y-c)^2+4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}+4b^2$$
$$x^2+y^2+2cy+c^2=x^2+y^2-2cy+c^2+4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}+4b^2$$
$$4cy-4b^2=4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$
$$cy-b^2=b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$
$$(cy-b^2)^2=b^2(x^2+(y-c)^2)$$
$$c^2y^2-2b^2cy+b^4=b^2(x^2+y^2-2cy+c^2)$$
$$c^2y^2-2b^2cy+b^4=b^2x^2+b^2y^2-2b^2cy+b^2c^2$$
$$-b^2x^2+c^2y^2-b^2y^2=b^2c^2-b^4$$
$$-b^2x^2+(c^2-b^2)y^2=b^2(c^2-b^2)$$
stel $a^2=c^2-b^2$
$$-b^2x^2+a^2y^2=b^2a^2$$
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$
voor ieder punt $P(x,-y)$ op de onderste tak van de hyperbool geldt:
$$\sqrt{x^2+(-y+c)^2}-\sqrt{x^2+(-y-c)^2}=2b$$

net zoals bij opgave 51c kunnen we dit ook herleiden tot $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

Opgave 53:

a. $a=2 \quad c=3$

dus $b^2=c^2-a^2=9-4=5$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

b. $b=3 \quad c=4$

dus $a^2=c^2-b^2=16-9=7$

$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$

c. $a=4$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1$ door $(12,4)$

$\frac{144}{16}-\frac{16}{b^2}=1$

$9-\frac{16}{b^2}=1$

$-\frac{16}{b^2}=-8$

$b^2=2$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=1$

d. $c=5$

$b^2=c^2-a^2=25-a^2$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{25-a^2}=1$ door $(4,3)$

$\frac{16}{a^2}-\frac{9}{25-a^2}=1$

$16-\frac{9a^2}{25-a^2}=a^2$

$16(25-a^2)-9a^2=a^2(25-a^2)$

$400-16a^2-9a^2=25a^2-a^4$

$a^4-50a^2+400=0$

$(a^2-10)(a^2-40)=0$

$a^2=10 \quad \vee \quad a^2=40$

$b^2=15 \qquad b^2=-15$ kan niet

$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$

Opgave 54:

a. het middelpunt van de cirkel is $(-4,0)$

het middelpunt van de cirkel is ook één van de brandpunten van de hyperbool

zowel het brandpunt $(-4,0)$ als ook de top $(3,0)$ liggen op de x-as, dus $2a = r = 6$
dus $a = 3$
dus de afstand van het middelpunt tot de toppen van de hyperbool is 3
dus het middelpunt van de hyperbool is $(0,0)$ óf $(6,0)$
omdat $(-4,0)$ een brandpunt is kan $(6,0)$ niet het middelpunt van de hyperbool zijn
dus het punt $(0,0)$ is het middelpunt van de hyperbool

dus $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

b. $a = 3 \quad c = 4$

$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$

$b = \sqrt{7}$

Opgave 55:

$x^2 + y^2 + 10y - 39 = 0$

$x^2 + (y+5)^2 - 25 - 39 = 0$

$x^2 + (y+5)^2 = 64$

het middelpunt van de richtcirkel is $(0,-5)$
dus één van de brandpunten van de hyperbool is $(0,-5)$
zowel een brandpunt als een top liggen op de y-as, dus $2b = r = 8$
dus $b = 4$

$b = 4 \quad c = 5$

$a^2 = c^2 - b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

dus $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$

Opgave 56:

a. $3x^2 - 5y^2 = 30$

$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$

$a^2 = 10$ dus $a = \sqrt{10}$

$b^2 = 6$ dus $6 = c^2 - 10$

dus $c^2 = 16$ dus $c = 4$

de toppen zijn $(\sqrt{10},0)$ en $(-\sqrt{10},0)$

de brandpunten zijn $(4,0)$ en $(-4,0)$

b. $x + y = 8$

$y = 8 - x$

$3x^2 - 5(8-x)^2 = 30$

$3x^2 - 5(64 - 16x + x^2) = 30$

$3x^2 - 320 + 80x - 5x^2 = 30$

$-2x^2 + 80x - 350 = 0$

$x^2 - 40x + 175 = 0$

$(x-5)(x-35) = 0$

$x = 5 \quad \vee \quad x = 35$

$x = 5$ geeft $y = 3$

$x = 35$ geeft $y = -27$

dus de snijpunten zijn $(5,3)$ en $(35,-27)$

Opgave 57:

a. $\begin{cases} 25p - 4q = 80 \\ 100p - 64q = 80 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 4 \\ \times 1 \end{vmatrix}$

$\begin{cases} 100p - 16q = 320 \\ 100p - 64q = 80 \quad - \end{cases}$

$48q = 240$

$q = 5$

$25p - 20 = 80$

$25p = 100$

$p = 4$

b. $4x^2 - 5y^2 = 80$

$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 20$ dus $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$b^2 = 16$ dus $16 = c^2 - 20$

dus $c^2 = 36$

dus $c = 6$

de toppen zijn $(2\sqrt{5},0)$ en $(-2\sqrt{5},0)$

de brandpunten zijn $(6,0)$ en $(-6,0)$

Opgave 58:

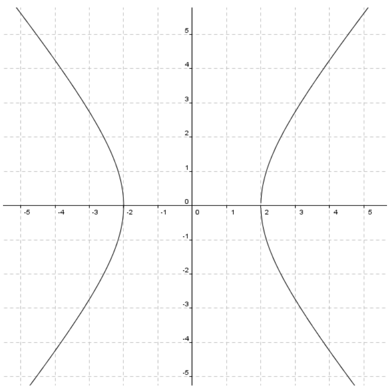
a. $3x^2 - 2y^2 = 12$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$

$a^2 = 4$ dus $a = 2$

dus de toppen zijn $(2,0)$ en $(-2,0)$

b.



c. $y = \frac{6}{5}x$

$3x^2 - 2(\frac{6}{5}x)^2 = 12$

$3x^2 - \frac{72}{25}x^2 = 12$

$\frac{3}{25}x^2 = 12$

$x^2 = 100$

$x = 10 \quad \vee \quad x = -10$

$y = 12 \qquad\quad y = -12$

dus de snijpunten zijn $(10,12)$ en $(-10,-12)$

d. $y = 2x$

$3x^2 - 2(2x)^2 = 12$

$3x^2 - 8x^2 = 12$

$-5x^2 = 12$ en deze vergelijking heeft geen oplossingen

Opgave 59:

a. één top van de hyperbool is $(a,0)$

voor asymptoot l_1 geldt: $y = \frac{b}{a}x$

$x = a$ geeft $y = \frac{b}{a} \cdot a = b$

dus de verticale afstand van de top $(a,0)$ tot de asymptoot is b

b. de asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$

Opgave 60:

a. $a^2 = 16$ dus $a = 4$

$b^2 = 9$ dus $b = 3$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{3}{4}x$ en $y = -\frac{3}{4}x$

b. $16x^2 - 25y^2 = 400$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y}{16} = 1$$

$a^2 = 25$ dus $a = 5$

$b^2 = 16$ dus $b = 4$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{4}{5}x$ en $y = -\frac{4}{5}x$

c. $x^2 - 9y^2 + 9 = 0$

$x^2 - 9y^2 = -9$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$$

$a^2 = 9$ dus $a = 3$

$b^2 = 1$ dus $b = 1$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{1}{3}x$ en $y = -\frac{1}{3}x$

d. $a = 4 \quad c = 5$

$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$b = 3$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{3}{4}x$ en $y = -\frac{3}{4}x$

e. $b = 2 \quad c = 3$

$a^2 = c^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

$a = \sqrt{5}$

dus de asymptoten zijn: $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x = \frac{2}{5}\sqrt{5}\cdot x$ en $y = -\frac{2}{5}\sqrt{5}\cdot x$

Opgave 61:

a. $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

$a = 2b$

$\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$x^2 - 4y^2 = 4b^2$ door $(10,4)$

$100 - 64 = 4b^2$

$4b^2 = 36$

$b^2 = 9$

$b = 3$

$a = 6$

b. $9 = c^2 - 36$

$c^2 = 45$

$c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

de toppen zijn: $(6,0)$ en $(-6,0)$

de brandpunten zijn: $(3\sqrt{5},0)$ en $(-3\sqrt{5},0)$

Opgave 62:

a. als $b = a$ dan is $rc_1 = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$ en $rc_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{a} = -1$

$rc_1 \cdot rc_2 = 1 \cdot -1 = -1$ dus de twee asymptoten staan loodrecht op elkaar

b. $x^2 - y^2 = 2$

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

$a^2 = b^2 = 2$

dus $a = b = \sqrt{2}$, dus h_1 is een orthogonale hyperbool

$2 = c^2 - 2$

$c^2 = 4$ dus $c = 2$

de toppen zijn: $(\sqrt{2},0)$ en $(-\sqrt{2},0)$

de brandpunten zijn: $(2,0)$ en $(-2,0)$

c. $a = 3$ dus $b = 3$

$9 = c^2 - 9$

$c^2 = 18$ dus $c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

de brandpunten zijn: $(3\sqrt{2},0)$ en $(-3\sqrt{2},0)$

d. $a = b$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ dus $x^2 - y^2 = a^2$ door $(4,1)$

$16 - 1 = a^2$

$a^2 = 15$ dus $a = \sqrt{15}$

$15 = c^2 - 15$

$c^2 = 30$ dus $c = \sqrt{30}$

Opgave 63:

a. $d(P,F) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{x} - 2\right)^2}$

b. het middelpunt M van de cirkel is: $(-2,-2)$

$d(P,c) = d(P,M) - d(M,c) = d(P,M) - 4 = \sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2)^2\right)} - 4$

c. er geldt: $d(P,F) = d(P,c) = d(P,M) - 4$

dus $d(P,M) - d(P,c) = 4$

dus P ligt op een tak van een hyperbool

d. gegeven is de cirkel: $c_2: \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$

het middelpunt M van deze cirkel is: $(2,2)$

stel $P(x, \frac{2}{x})$ en $F(-2,-2)$ dan geldt:

$d(P,F) = \sqrt{(-x+2)^2 + \left(\frac{2}{-x} + 2\right)^2}$

$d(P,c) = d(P,M) - d(M,c) = d(P,M) - 4 = \sqrt{(-x-2)^2 + \left(\frac{2}{-x} - 2\right)^2} - 4$

neem $y_1 = \sqrt{(-x+2)^2 + \left(\frac{2}{-x} + 2\right)^2}$ en $y_2 = \sqrt{(-x-2)^2 + \left(\frac{2}{-x} - 2)\right)^2} - 4$

de tabel geeft gelijke waarden voor y_1 en y_2

dus $d(P,F) = d(P,c) = d(P,M) - 4$

dus $d(P,M) - d(P,F) = 4$

dus P ligt op een tak van een hyperbool

Opgave 64:

a. $\frac{b}{a} = 3$ dus $b = 3a$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9a^2} = 1$

$9x^2 - y^2 = 9a^2$ door $(3, 3\sqrt{5})$

$81 - 45 = 9a^2$

$9a^2 = 36$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$b = 6$

$h_1: \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$

b. $36 = c^2 - 4$

$c^2 = 40$

$c = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

dus de brandpunten zijn $(2\sqrt{10},0)$ en $(-2\sqrt{10},0)$

c. $a = b = 2\sqrt{10}$

$h_2: \quad \frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{40} = 1$

Opgave 65:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$-a^2y^2 = -b^2x^2 + a^2b^2$

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$

als $y_A > 0$ dan ligt A op de hyperbooltak: $y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$

neem $y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{u}$ met $u = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$ dus $u' = \frac{2b^2}{a^2}x$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{2b^2}{a^2}x = \frac{b^2x}{a^2\sqrt{u}} = \frac{b^2x}{a^2y}$

$k: \quad y - y_A = \frac{b^2x_A}{a^2y_A} \cdot (x - x_A)$

$a^2y_Ay - a^2y_A{}^2 = b^2x_Ax - b^2x_A{}^2$

$-b^2x_Ax + a^2y_Ay = -b^2x_A{}^2 + a^2y_A{}^2$

$b^2x_Ax - a^2y_Ay = b^2x_A{}^2 - a^2y_A{}^2$

$b^2x_Ax - a^2y_Ay = a^2b^2$

$\frac{x_Ax}{a^2} - \frac{y_Ay}{b^2} = 1$

als $y_A < 0$ dan ligt A op de hyperbooltak $y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$

neem $y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = -\sqrt{u}$ met $u = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$ dus $u' = \frac{2b^2}{a^2}x$

$y' = \frac{-1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{-1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{2b^2}{a^2}x = \frac{-b^2x}{a^2\sqrt{u}} = \frac{-b^2x}{a^2 \cdot -y} = \frac{b^2x}{a^2y}$

dit levert voor k dezelfde vergelijking op, dus $k: \quad \frac{x_Ax}{a^2} - \frac{y_Ay}{b^2} = 1$

Opgave 66:

a. $k: \quad 3 \cdot 3 \cdot x - 5 \cdot -1 \cdot y = 22$

$9x + 5y = 22$

b. $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{40} = 1$ ofwel $40x^2 - 14y^2 = 560$

raaklijn m in punt $(-7,-10)$ is: $40 \cdot -7 \cdot x - 14 \cdot -10 \cdot y = 560$

$-280x + 140y = 560$

$-2x + y = 4$

$\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$n: \quad x + 2y = c$ door $(-7,-10)$

$n: \quad x + 2y = -27$

Opgave 67:

a. de poollijn van $A(2,-2)$ ten opzichte van de hyperbool is: $2x - 8 \cdot -2 \cdot y = 28$

dus $2x + 16y = 28$

dus $x + 8y = 14$

dus $x = 14 - 8y$

de snijpunten van de poollijn met de hyperbool zijn:

$(14 - 8y)^2 - 8y^2 = 28$

$196 - 224y + 64y^2 - 8y^2 = 28$

$56y^2 - 224y + 168 = 0$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$(y-1)(y-3) = 0$

$y = 1 \quad \vee \quad y = 3$

$x = 6 \qquad\quad x = -10$

raaklijn in $(6,1)$ is: $6x - 8 \cdot 1y = 28$ ofwel $3x - 4y = 14$

raaklijn in $(-10,3)$ is: $-10x - 8 \cdot 3y = 28$ ofwel $5x + 12y = -14$

b. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ ofwel $2x^2 - 3y^2 = 24$

de poollijn van $B(1,-1)$ ten opzichte van de hyperbool is: $2 \cdot 1 \cdot x - 3 \cdot -1 \cdot y = 24$

dus $2x + 3y = 24$

dus $2x = 24 - 3y$

dus $x = 12 - 1\frac{1}{2}y$

de snijpunten van deze poollijn met de hyperbool zijn:

$2(12 - 1\frac{1}{2}y)^2 - 3y^2 = 24$

$2(144 - 36y + 2\frac{1}{4}y^2) - 3y^2 = 24$

$288 - 72y + 4\frac{1}{2}y^2 - 3y^2 = 24$

$1\frac{1}{2}y^2 - 72y + 264 = 0$

$y^2 - 48y + 176 = 0$

$(y-4)(y-44) = 0$

$y = 4 \quad \vee \quad y = 44$

$x = 6 \qquad\quad x = -54$

raaklijn in $(6,4)$ is: $2 \cdot 6 \cdot x - 3 \cdot 4 \cdot y = 24$ ofwel $x - y = 2$

raaklijn in $(-54,44)$ is: $2 \cdot -54 \cdot x - 3 \cdot 44 \cdot y = 24$ ofwel $9x + 11y = -2$

Opgave 68:

a. de raaklijn in (x_A, y_A) is: $x_A x - a^2 y_A y = -80$

de raaklijn is ook $x + y = 10$ ofwel $-8x - 8y = -80$

dus $x_A = -8$

dan $y_A = 18$ dus $a^2 \cdot 18 = 8$

dus $a^2 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

b. de raaklijn in (x_B, y_B) is: $b^2 x_B x - 8y_B y = 100$

de raaklijn is ook $3x - 4y = 10$ ofwel $30x - 40y = 100$

dus $8y_B = 40$

dus $y_B = 5$

dan $3x_B - 20 = 10$

dus $3x_B = 30$

dus $x_B = 10$

dus $b^2 \cdot 10 = 30$

dus $b^2 = 3$

Opgave 69:

a. voor *k* en *l* geldt: $y = x + b$ ofwel $-x + y = b$

de raaklijn in (x_A, y_A) is: $x_A x - 3y_A y = 24$

de raaklijn is ook: $-x + y = b$

dus $\dfrac{x_A}{-1} = \dfrac{-3y_A}{1} = \dfrac{24}{b}$

dus $x_A = 3y_A$

dus $(3y_A)^2 - 3{y_A}^2 = 24$

$9{y_A}^2 - 3{y_A}^2 = 24$

$6{y_A}^2 = 24$

${y_A}^2 = 4$

$y_A = -2 \quad \vee \quad y_A = 2$

$x_A = -6 \qquad x_A = 6$

dus de raakpunten zijn $(-6,-2)$ en $(6,2)$

b. als een lijn met $rc = -\frac{5}{3}$ de hyperbool loodrecht snijdt, dan geldt in het snijpunt voor de raaklijn $rc = \frac{3}{5}$

dus de raaklijn is: $y = \frac{3}{5}x + b$ ofwel $-3x + 5y = 5b$

de raaklijn in (x_B, y_B) is: $x_B x - 3y_B y = 24$

dus $\dfrac{x_B}{-3} = \dfrac{-3y_B}{5} = \dfrac{24}{5b}$

dus $5x_B = 9y_B$

$x_B = \frac{9}{5} y_B$

dus $(\frac{9}{5} y_B)^2 - 3{y_B}^2 = 24$

$\frac{81}{25}{y_B}^2 - 3{y_B}^2 = 24$

$\frac{6}{25}{y_B}^2 = 24$

${y_B}^2 = 100$

$y_B = 10 \quad \vee \quad y_B = -10$

$x_B = 18 \qquad x_B = -18$

dus de raakpunten zijn $(18,10)$ en $(-18,-10)$

Opgave 70:

a. $3x^2 - y^2 = 71$

$\frac{x^2}{\frac{71}{3}} - \frac{y^2}{71} = 1$

$a^2 = \frac{71}{3}$ dus $a = \sqrt{\frac{71}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{213}$

$b^2 = 71$

$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{71}{3} + 71 = 94\frac{2}{3}$ dus $c = \sqrt{94\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{284}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{213}$

de toppen zijn: $(\frac{1}{3}\sqrt{213},0)$ en $(-\frac{1}{3}\sqrt{213},0)$

de brandpunten zijn: $(\frac{2}{3}\sqrt{213},0)$ en $(-\frac{2}{3}\sqrt{213},0)$

b. $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{71}}{\sqrt{\frac{71}{3}}} = \frac{\sqrt{71}}{\frac{\sqrt{71}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

de asymptoten zijn: $y = x\sqrt{3}$ en $y = -x\sqrt{3}$

c. $k: \quad 3 \cdot 5 \cdot x - -2 \cdot y = 71$

$k: \quad 15x + 2y = 71$

d. raaklijn in $B(12,19)$ is: $m: \quad 3 \cdot 12 \cdot x - 19 \cdot y = 71$

$m: \quad 36x - 19y = 71$

$\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} 36 \\ -19 \end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n} = \begin{pmatrix} 19 \\ 36 \end{pmatrix}$

$n: \quad 19x + 36y = c$ door $B(12,19)$

$n: \quad 19x + 36y = 912$

e. de lijnen p en q zijn van de vorm: $y = 2x + b$

dus $2x - y = -b$

de raaklijn in $C(x_C, y_C)$ is: $3 \cdot x_C \cdot x - y_C \cdot y = 71$

$\frac{3x_C}{2} = \frac{-y_C}{-1} = \frac{71}{-b}$

$-2y_C = -3x_C$

$y_C = 1\frac{1}{2}x_C$

$3x_C{}^2 - (1\frac{1}{2}y_C)^2 = 71$

$3x_C{}^2 - 2\frac{1}{4}x_C{}^2 = 71$

$\frac{3}{4}x_C{}^2 = 71$

$x_C{}^2 = \frac{284}{3}$

$x_C = \sqrt{\frac{284}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{213} \quad \vee \quad x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{213}$

Opgave 71:

de poollijn van $P(1,\frac{1}{5})$ ten opzichte van de hyperbool $x^2 - a^2y^2 = 6$ is: $1 \cdot x - a^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot y = 6$

dus $x - \frac{1}{5}a^2 y = 6$

de poollijn is ook: $x - 2y = c$

dus $-\frac{1}{5}a^2 = -2 \quad \wedge \quad c = 6$
dus $a^2 = 10 \quad \wedge \quad c = 6$
dus de hyperbool is: $x^2 - 10y^2 = 6$
de poollijn is: $x - 2y = 6$ dus $x = 2y + 6$
de snijpunten van de poollijn en de hyperbool zijn:
$(2y+6)^2 - 10y^2 = 6$
$4y^2 + 24y + 36 - 10y^2 = 6$
$-6y^2 + 24y + 30 = 0$
$y^2 - 4y - 5 = 0$
$(y+1)(y-5) = 0$
$y = -1 \quad \vee \quad y = 5$
$x = 4 \qquad\quad x = 16$
dus de snijpunten zijn: $(4,-1)$ en $(16,5)$

Opgave 72:

a. $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 15 = 0$
$4(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) - 15 = 0$
$4((x+1)^2 - 1) - ((y-2)^2 - 4) - 15 = 0$
$4(x+1)^2 - 4 - (y-2)^2 + 4 - 15 = 0$
$4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 15$
$4x^2 - y^2 = 15 \xrightarrow{T(-1,2)} 4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 15$
$4x^2 - y^2 = 15$ ofwel $\dfrac{x^2}{\frac{15}{4}} - \dfrac{y^2}{15} = 1$
$a^2 = \frac{15}{4} \qquad b^2 = 15$ dus $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{15}{4} + 15 = 18\frac{3}{4}$
dus $a = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{15}$ en $c = \sqrt{18\frac{3}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$
van $\dfrac{x^2}{\frac{15}{4}} - \dfrac{y^2}{15} = 1$ is het middelpunt $(0,0)$, de toppen zijn $(\frac{1}{2}\sqrt{15},0)$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{15},0)$
en de brandpunten zijn $(\frac{5}{2}\sqrt{3},0)$ en $(-\frac{5}{2}\sqrt{3},0)$
dus van $4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 15$ is het middelpunt $(-1,2)$, zijn de toppen:
$(-1+\frac{1}{2}\sqrt{15},2)$ en $(-1-\frac{1}{2}\sqrt{15},2)$ en zijn de brandpunten $(-1+\frac{5}{2}\sqrt{3},2)$ en $(-1-\frac{5}{2}\sqrt{3},2)$

b. van $\dfrac{x^2}{\frac{15}{4}} - \dfrac{y^2}{15} = 1$ is $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{15}{4}}} = \dfrac{\sqrt{15}}{\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4}}} = \sqrt{4} = 2$
dus de asymptoten zijn $y = 2x$ en $y = -2x$
dus van $4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 15$ zijn de asymptoten $y - 2 = 2(x+1)$ en $y - 2 = -2(x+1)$
dus $y = 2x + 4$ en $y = -2x$

c. $k: \quad 4(3+1)(x+1) - (9-2)(y-2) = 15$
$k: \quad 16(x+1) - 7(y-2) = 15$
$k: \quad 16x + 16 - 7y + 14 = 15$
$k: \quad 16x - 7y = -15$