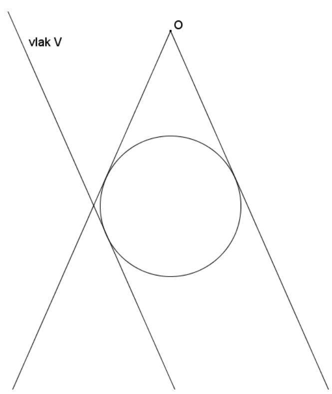
11.4 Vergelijkingen van de tweede graad

Opgave 73:
De ruimtelijke figuur die ontstaat is een kegel, dus de doorsnede van *V* met de kegel is een cirkel.

Opgave 74:
a. vlak *V* is raakvlak aan de grote bol in punt F_1
de punten P en F_1 liggen in vlak *V*, dus lijn PF_1 is raaklijn aan de grote bol
lijn OP raakt de grote bol int punt *A*
dus PF_1 en *PA* zijn raaklijnstukken aan de grote bol
dus $PF_1 = PA$
op dezelfde manier geldt: $PF_2 = PB$
b. $\left.\begin{array}{l} PF_1 = PA \\ PF_2 = PB \end{array}\right\} \quad PF_1 + PF_2 = PA + PB$
als vlak *V* gegeven is, dan liggen de punten *A* en *B* vast, dus $PA + PB =$ constant
dus $PF_1 + PF_2 =$ constant
dus punt *P* ligt op een ellips met brandpunten F_1 en F_2

Opgave 75:
a. vlak *V* raakt de grote bol in punt F_1
de punten P en F_1 liggen in vlak *V*, dus lijn PF_1 is raaklijn aan de grote bol
lijn OP raakt de grote bol int punt *A*
dus PF_1 en *PA* zijn raaklijnstukken aan de grote bol
dus $PF_1 = PA$
op dezelfde manier geldt: $PF_2 = PB$
b. $\left.\begin{array}{l} PF_1 = PA \\ PF_2 = PB \end{array}\right\} \quad PF_2 - PF_1 = PB - PA$
als vlak *V* gegeven is, dan liggen de punten *A* en *B* vast, dus $PB - PA =$ constant
dus $PF_2 - PF_1 =$ constant
dus punt *P* ligt op een hyperbool

Opgave 76:
a. de bol moet de kegel en het vlak *V* raken
in de figuur hiernaast zie je de doorsnede loodrecht op de as van de kegel en loodrecht op vlak *V*
in deze doorsnede moet er dus een cirkel raken aan de twee lijnen door de top van de kegel
dit kan maar één cirkel zijn
dus er is ook maar één bol van Dandelin



b. $\angle(V, as) = \alpha$ dus $\angle(V, W) = 90° - \alpha$
c. *PF* en *PA* zijn raaklijnstukken vanuit *P* aan de bol
dus $PF = PA$
d. $\angle(PA., as) = \alpha$ dus $\angle(PA, W) = 90° - \alpha$

e. $$\left.\begin{array}{r}\angle(V,W)=\angle(PB,W)=90^\circ-\alpha\\ \angle(PA,W)=90^\circ-\alpha\end{array}\right\}\quad \angle(PA<W)=\angle(PB,W)$$

dus ΔABP is een gelijkbenige driehoek

dus $PA=PB$

$$\left.\begin{array}{r}PA=PB\\ PA=d(P,F)\\ PB=d(P,s)\end{array}\right\}\quad d(P,F)=d(P,s)$$

dus punt P ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn s

Opgave 77:

I is een parabool

II is een cirkel

III is een ellips

IV is een hyperbool

Opgave 78:

a. $y^2-6x+8y+28=0$

$(y+4)^2-16-6x+28=0$

$(y+4)^2=6x-12$

$(y+4)^2=6(x-2)$

het is een parabool met top $(2,-4)$ en brandpunt $F(1\frac{1}{2}+2,-4)$ dus $F(3\frac{1}{2},-4)$

b. $x^2+9y^2+2x-8=0$

$(x+1)^2-1+9y^2-8=0$

$(x+1)^2+9y^2=9$

$\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$

het is een ellips met middelpunt $(-1,0)$ en toppen $(-4,0)$, $(2,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$

$a^2>b^2$ dus $c^2=a^2-b^2=9-1=8$ dus $c=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

dus de brandpunten zijn: $(-1+2\sqrt{2},0)$ en $(-1-2\sqrt{2},0)$

c. $x^2-9y^2+4x-5=0$

$(x+2)^2-4-9y^2-5=0$

$(x+2)^2-9y^2=9$

$\dfrac{(x+2)^2}{9}-\dfrac{y^2}{1}=1$

het is een hyperbool met middelpunt $(-2,0)$ en toppen $(-5,0)$ en $(1,0)$

$c^2=a^2+b^2=9+1=10$ dus $c=\sqrt{10}$

dus de brandpunten zijn: $(-2+\sqrt{10},0)$ en $(-2-\sqrt{10},0)$

$a^2=9$ dus $a=3$, $b^2=1$ dus $b=1$

dus de asymptoten zijn: $y=\frac{1}{3}(x+2)$ en $y=-\frac{1}{3}(x+2)$

Opgave 79:

a. $4x^2+4y^2+2x-12y-15=0$

$4(x^2+\frac{1}{2}x)+4(y^2-3y)-15=0$

$(x^2+\frac{1}{2}x)+(y^2-3y)-\frac{15}{4}=0$

$(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}+(y-1\frac{1}{2})^2-2\frac{1}{4}-\frac{15}{4}=0$

$(x+\frac{1}{4})^2+(y-1\frac{1}{2})^2=\frac{97}{16}$

het is een cirkel met middelpunt $(-\frac{1}{4},1\frac{1}{2})$ en straal $r=\sqrt{\frac{97}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{97}$

b. $4x^2+y^2-8x+8y+16=0$

$4(x^2-2x)+y^2+8y+16=0$

$4((x-1)^2-1)+(y+4)^2-16+16=0$

$4(x-1)^2-4+(y+4)^2=0$

$4(x-1)^2+(y+4)^2=4$

$$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$$

het is een ellips met middelpunt $(1,-4)$ en toppen $(0,-4)$, $(2,-4)$, $(1,-2)$, $(1,-6)$

$a^2<b^2$ dus $c^2=b^2-a^2=4-1=3$ dus $c=\sqrt{3}$

dus de brandpunten zijn: $(1,-4+\sqrt{3})$ en $(1,-4-\sqrt{3})$

c. $x^2-y^2+4x+8y-20=0$

$(x+2)^2-4-(y^2-8y)-20=0$

$(x+2)^2-((y-4)^2-16)-24=0$

$(x+2)^2-(y-4)^2+16-24=0$

$(x+2)^2-(y-4)^2=8$

$$\frac{(x+2)^2}{8}-\frac{(y-4)^2}{8}=1$$

het is een hyperbool met middelpunt $(-2,4)$ en toppen $(-2+2\sqrt{2},4)$ en $(-2-2\sqrt{2},4)$

$c^2=a^2+b^2=8+8=16$ dus $c=4$

dus de brandpunten zijn $(-6,4)$ en $(2,4)$

$a^2=b^2=8$ dus $a=b=\sqrt{8}$

dus de asymptoten zijn: $y-4=x+2$ en $y-4=-(x+2)$ ofwel $y=x+6$ en $y=-x+2$