11.5 Diagnostische toets

Opgave 1:

a. $\frac{1}{2}p = 8$

$p = 16$

$y^2 = 32x$

b. $\frac{1}{2}p = 6 - 10 = -4$

$p = -8$

$y^2 = -16(x - 10)$

c. de top is: $(-1,2)$

$\frac{1}{2}p = 4 - -1 = 5$

$p = 10$

$(y-2)^2 = 20(x+1)$

d. het brandpunt is: $(8,2)$

$\frac{1}{2}p = 3 - 4 = -1$

$p = -2$

$(x-8)^2 = -4(y-3)$

Opgave 2:

a. $y^2 - 10y = 2x + 1$

$(y-5)^2 - 25 = 2x + 1$

$(y-5)^2 = 2x + 26$

$(y-5)^2 = 2(x+13)$

$y^2 = 2x \xrightarrow{T(-13,5)} (y-5)^2 = 2(x+13)$

$y^2 = 2x$ heeft als top $(0,0)$, brandpunt $(\frac{1}{2},0)$, richtlijn $x = -\frac{1}{2}$ en as $y = 0$

$(y-5)^2 = 2(x+13)$ heeft als top $(-13,5)$, brandpunt $(-12\frac{1}{2},5)$, richtlijn $x = -13\frac{1}{2}$ en as $y = 5$

b. $y = \frac{1}{8}x^2 + 2x - 4$

$x^2 + 16x - 32 = 8y$

$(x+8)^2 - 64 - 32 = 8y$

$(x+8)^2 = 8y + 96$

$(x+8)^2 = 8(y+12)$

$x^2 = 8y \xrightarrow{T(-8,-12)} (x+8)^2 = 8(y+12)$

$x^2 = 8y$ heeft als top $(0,0)$, brandpunt $(0,2)$, richtlijn $y = -2$ en as $x = 0$

$(x+8)^2 = 8(y+12)$ heeft als top $(-8,-12)$, brandpunt $(-8,-10)$, richtlijn $y = -14$ en as $x = -8$

Opgave 3:

a. $k: \quad y = -1\frac{1}{2}x + \dfrac{-3}{2 \cdot -1\frac{1}{2}}$

$k: \quad y = -1\frac{1}{2}x + 1$

b. $l: \quad 3y = -3x + -3 \cdot -1\tfrac{1}{2}$

$3y = -3x + 4\tfrac{1}{2}$

$y = -x + 1\tfrac{1}{2}$

c. raaklijn m in punt $B(-6,6)$ is: $m: \quad 6y = -3x + -3 \cdot -6$

$6y = -3x + 18$

$3x + 6y = 18$

$x + 2y = 6$

$\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$n: \quad 2x - y = c$ door $(-6,6)$

$n: \quad 2x - y = -18$

d. de poollijn van $P(2,-2)$ ten opzichte van de parabool is lijn k

$k: \quad -2y = -3x + -3 \cdot 2$

$-2y = -3x - 6$

$y = 1\tfrac{1}{2}x + 3$

de snijpunten van k en de parabool zijn:

$(1\tfrac{1}{2}x + 3)^2 = -6x$

$2\tfrac{1}{4}x^2 + 9x + 9 = -6x$

$2\tfrac{1}{4}x^2 + 15x + 9 = 0$

$9x^2 + 60x + 36 = 0$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{2304}}{18} = \frac{-60 \pm 48}{18}$$

$x = -\tfrac{2}{3} \quad \vee \quad x = -6$

$y = 2 \qquad\quad y = -6$

raaklijn in $(-\tfrac{2}{3},2)$ is: $m_1: \quad 2y = -3x + -3 \cdot -\tfrac{2}{3}$

$3x + 2y = 2$

raaklijn in $(-6,-6)$ is: $m_2: \quad -6y = -3x + -3 \cdot -6$

$3x - 6y = 18$

$x - 2y = 6$

Opgave 4:

a. $a = 3 \quad b = 2$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

b. $a = 2 \quad b = 1$

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

c. het middelpunt is $(8,2)$

$a = 2 \quad c = 1$

$b^2 = a^2 - c^2 = 3$

$$\frac{(x-8)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

d. het middelpunt is $(-1,6)$

$c = 4$

$c^2 = b^2 - a^2$

$b^2 = a^2 + c^2 = a^2 + 16$

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-6)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-6)^2}{a^2+16} = 1 \text{ door } (0,6+\sqrt{15})$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{15}{a^2+16} = 1$$

$$1 + \frac{15a^2}{a^2+16} = a^2$$

$a^2 + 16 + 15a^2 = a^2(a^2+16)$

$16a^2 + 16 = a^4 + 16a^2$

$a^4 = 16$

$a^2 = 4$ dus $b^2 = 20$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{20} = 1$$

Opgave 5:

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 11 = 0$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

dus het middelpunt van de cirkel is $M(2,-1)$ en $r = 4$

punt F ligt binnen de cirkel dus de conflictlijn is een ellips met brandpunten $(2,-1)$ en $(2,1)$

dus het middelpunt van de ellips is het punt $(2,0)$

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$d(P,F_1) + d(P,F_2) = r$ en $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2b$

dus $2b = r = 4$

dus $b = 2$

$c = 1$

$c^2 = b^2 - a^2$

$a^2 = b^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$

$$\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Opgave 6:

a. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y - 71 = 0$

$4(x^2 + 8x) + 9(y^2 - 2y) = 71$

$4((x+4)^2 - 16) + 9((y-1)^2 - 1) = 71$

$4(x+4)^2 - 64 + 9(y-1)^2 - 9 = 71$

$4(x+4)^2 + 9(y-1)^2 = 144$

$$\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

$a^2=36$ dus $a=6$

$b^2=16$ dus $b=4$

$c^2=a^2-b^2=36-16=20$

dus $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

het middelpunt van de ellips is $(-4,1)$

de toppen zijn $(2,1),(-10,1),(-4,5),(-4,-3)$

de brandpunten zijn $(-4+2\sqrt{5},1)$ en $(-4-2\sqrt{5},1)$

b. $6(x+3)^2+(y-2)^2=30$

$$\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{30}=1$$

het middelpunt van de ellips is $(-3,2)$

$a^2=5$ dus $a=\sqrt{5}$

$b^2=30$ dus $b=\sqrt{30}$

$c^2=b^2-a^2=30-5=25$ dus $c=5$

de toppen zijn: $(-3+\sqrt{5},2),(-3-\sqrt{5},2),(-3,2+\sqrt{30}),(-3,2-\sqrt{30})$

de brandpunten zijn: $(-3,7)$ en $(-3,-3)$

Opgave 7:

a. $k:\quad 6x+10y\cdot -1=46$

$6x-10y=46$

$3x-5y=23$

b. de raaklijn *m* in het punt $B(2,3)$ is: $m:\quad 4\cdot 2\cdot x+12\cdot 3\cdot y=124$

$8x+36y=124$

$2x+9y=31$

$\overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{n_n}=\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$

$n:\quad 9x-2y=c$ door $B(2,3)$

$n:\quad 9x-2y=12$

c. de poollijn *l* van $P(17\tfrac{2}{5},-3)$ ten opzichte van de ellips is:

$25\cdot 17\tfrac{2}{5}x+9\cdot -3y=5625$

$435x-27y=5625$

$145x-9y=1875$

$-9y=-145x+1875$

$3y=48\tfrac{1}{3}x-625$

de snijpunten van lijn *l* en de ellips zijn:

$25x^2+(48\tfrac{1}{3}x-625)^2=5625$

$25x^2+2336\tfrac{1}{9}x^2-60416\tfrac{2}{3}x+390625=5625$

$2361\tfrac{1}{9}x^2-60416\tfrac{2}{3}x+385000=0$

$21250x^2-543750x+3465000=0$

$17x^2 - 435x + 2772 = 0$

$$x = \frac{435 \pm \sqrt{729}}{34} = \frac{435 \pm 27}{34}$$

$x = 12 \quad \vee \quad x = 13\tfrac{10}{17}$

$y = -15 \qquad y = 10\tfrac{10}{17}$

raaklijn in $(12,-15)$ is: $25 \cdot 12x + 9 \cdot -15y = 5625$

$300x - 135y = 5625$

$20x - 9y = 375$

raaklijn in $(13\tfrac{10}{17}, 10\tfrac{10}{17})$ is: $25 \cdot 13\tfrac{10}{17}x + 9 \cdot 10\tfrac{10}{17}y = 5625$

$339\tfrac{12}{17}x + 95\tfrac{5}{17}y = 5625$

$5775x + 1620y = 95625$

$385x + 108y = 6375$

d. de raaklijnen zijn van de vorm: $y = -\tfrac{3}{5}x + b$ ofwel $3x + 5y = 5b$

de raaklijn in het punt $A(x_A, y_A)$ is: $3x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 32$

dus $\dfrac{3x_A}{3} = \dfrac{5y_A}{5} = \dfrac{32}{5b}$

dus $15x_A = 15y_A$

dus $x_A = y_A$

$3x_A{}^2 + 5x_A{}^2 = 32$

$8x_A{}^2 = 32$

$x_A{}^2 = 4$

$x_A = 2 \quad \vee \quad x_A = -2$

$y_A = 2 \qquad y_A = -2$

raaklijn in $(2,2)$ is: $3x + 5y = 16$

raaklijn in $(-2,-2)$ is: $3x + 5y = -16$