9.6 Analytische methoden bij lijnen en cirkels.

Opgave 78:

a. $rc_{AM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$rc_{BN} = \frac{-4}{2} = -2$

$rc_{AM} \cdot rc_{BN} = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1$ dus $AM \perp BN$

$$\left.\begin{array}{l}\angle MBS = \angle NBC \\ \angle BSM = 90° = \angle BCN\end{array}\right\} \quad \Delta BSM \infty \Delta BCN\ (hh)$$

b. $AM = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$BN = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\frac{BM}{BN} = \frac{SM}{CN}$ dus $\frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{SM}{2}$

$SM = \frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

c. $AS = AM - SM = 2\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{5} = 1\frac{3}{5}\sqrt{5}$

$AS : SM = 1\frac{3}{5}\sqrt{5} : \frac{2}{5}\sqrt{5} = 4 : 1$

Opgave 79:

Stel dat de eenheid een willekeurig getal c is, met $c \neq 0$, dan geldt:

OM: $y = \frac{c}{2c} \cdot x$ ofwel $y = \frac{1}{2}x$

BN: $y = -\frac{2c}{c} \cdot x + 4c$ ofwel $y = -2x + 4c$

$\frac{1}{2}x = -2x + 4c$

$2\frac{1}{2}x = 4c$

$x = \frac{8}{5}c$

dus $S(\frac{8}{5}c, \frac{4}{5}c)$

$D(0,2c)$

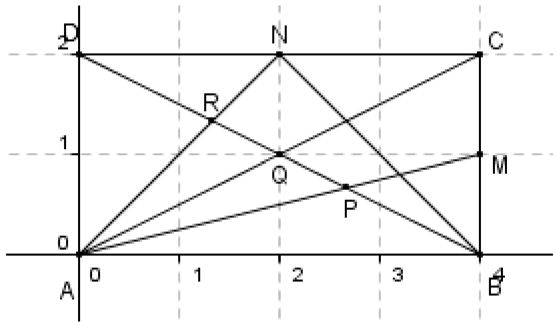
$DS = \sqrt{(\frac{8}{5}c)^2 + (\frac{6}{5}c)^2} = \sqrt{\frac{64}{25}c^2 + \frac{36}{25}c^2} = \sqrt{\frac{100}{25}c^2} = 2c$

ook $OD = 2c$ dus $DS = OD$ ofwel $DS = AD$:

dus de geldigheid van het bewijs hangt niet af van de grootte van c

Opgave 80:

Kies de oorsprong in punt A



lijn AM: $y = \frac{1}{4}x$

lijn BN: $rc = \frac{-2}{2} = -1$ door $(2,2)$

$y - 2 = -(x - 2)$

$y = -x + 4$

punt P is het snijpunt van AM en BN:

$\frac{1}{4}x = -x + 4$

$1\frac{1}{4}x = 4$

$x = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

$y = \frac{4}{5}$ dus $P(3\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$

lijn *AN*: $y = x$
lijn *AC*: $y = \frac{1}{2}x$
lijn *DP*: $rc = \dfrac{2-\frac{4}{5}}{0-3\frac{1}{5}} = \dfrac{1\frac{1}{5}}{-3\frac{1}{5}} = -\frac{3}{8}$ door $(0,2)$
$y = -\frac{3}{8}x + 2$
punt *Q* is het snijpunt van *AN* en *DP*:
$x = -\frac{3}{8}x + 2$
$1\frac{3}{8}x = 2$
$x = \frac{16}{11}$
$y = \frac{16}{11}$ dus $Q(\frac{16}{11}, \frac{16}{11})$
punt *R* is het snijpunt van *AC* en *DP*:
$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{8}x + 2$
$\frac{7}{8}x = 2$
$x = \frac{16}{7}$
$y = \frac{16}{14}$ dus $R(\frac{16}{7}, \frac{16}{14})$
het midden van *PQ* is $(2\frac{26}{35}, \frac{34}{35})$
dus punt *R* is niet het midden van *PQ*

Opgave 81:

a. $rc_{AC} = \frac{c}{-a} = -\frac{c}{a}$
lijn *k* loodrecht op *AC* dus $rc_k = \frac{-1}{rc_{AC}} = \frac{-1}{-\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$
lijn *k* door $(b,0)$
$k: \quad y = \frac{a}{c}(x-b)$
als $x = 0$ dan $y = -\frac{ab}{c}$ dus $H(0, -\frac{ab}{c})$

b. lijn *l* is de middelloodlijn van *AB* dus
$l: \quad x = \frac{b+a}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$
lijn *m* is de middelloodlijn van *AC* dus $rc_m = \frac{a}{c}$ en *m* gaat door $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}c)$
$m: \quad y - \frac{1}{2}c = \frac{a}{c}(x - \frac{1}{2}a)$
punt *M* is het snijpunt van *l* en *m*:
$y - \frac{1}{2}c = \frac{a}{c} \cdot (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)$
$y = \frac{1}{2}c + \frac{ab}{2c} = \frac{c^2}{2c} + \frac{ab}{2c} = \frac{ab+c^2}{2c}$

c. zwaartelijn z_1 gaat door punt *C* en het midden *P* van *AB*
$P(\frac{a+b}{2}, 0)$
$z_1: \quad y - c = \dfrac{0-c}{\frac{a+b}{2} - 0} \cdot x$
$y = \dfrac{-c}{\frac{a+b}{2}} \cdot x + c$
$y = \dfrac{-2c}{a+b} \cdot x + c$
zwaartelijn z_2 gaat door punt *B* en het midden *Q* van *AC*
$Q(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}c)$

$z_2: \quad y = \dfrac{0 - \frac{1}{2}c}{b - \frac{1}{2}a} \cdot (x - b)$

$y = \dfrac{c}{a - 2b} \cdot (x - b)$

Z is het snijpunt van z_1 en z_2:

$\dfrac{-2c}{a+b} \cdot x + c = \dfrac{c}{a-2b} \cdot (x - b)$

$\dfrac{-2c}{a+b} \cdot x = \dfrac{c}{a-2b} \cdot x - \dfrac{bc}{a-2b} - c$

$\dfrac{-2c}{a+b} \cdot x - \dfrac{c}{a-2b} \cdot x = -\dfrac{bc}{a-2b} - c$

$\dfrac{2c}{a+b} \cdot x + \dfrac{c}{a-2b} \cdot x = \dfrac{bc}{a-2b} + c$

$\left(\dfrac{2c}{a+b} + \dfrac{c}{a-2b}\right) \cdot x = \dfrac{bc}{a-2b} + c$

$\left(\dfrac{2c(a-2b) + c(a+b)}{(a+b)(a-2b)}\right) \cdot x = \dfrac{bc}{a-2b} + \dfrac{c(a-2b)}{a-2b}$

$\dfrac{3ac - 3bc}{(a+b)(a-2b)} \cdot x = \dfrac{ac - bc}{a-2b}$

$x = \dfrac{(a+b)(a-2b)}{3ac - 3bc} \cdot \dfrac{ac - bc}{a-2b}$

$x = \dfrac{a+b}{3}$

$y = \dfrac{-2c}{a+b} \cdot \dfrac{a+b}{3} + c = \frac{-2}{3}c + c = \frac{1}{3}c = \frac{c}{3}$

d. $HZ: \quad y - -\frac{ab}{c} = \dfrac{\frac{c}{3} - -\frac{ab}{c}}{\frac{a+b}{3} - 0} \cdot x$

$y + \frac{ab}{c} = \dfrac{\frac{c^2+3ab}{3c}}{\frac{a+b}{3}} \cdot x$

$y = \frac{c^2+3ab}{c(a+b)} \cdot x - \frac{ab}{c}$

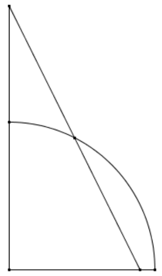
$x_M = \frac{a+b}{2}$

$y_M = \frac{c^2+3ab}{c(a+b)} \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{ab}{c} = \frac{c^2+3ab}{2c} - \frac{ab}{c} = \frac{c^2+3ab}{2c} - \frac{2ab}{2c} = \frac{c^2+ab}{2c}$ klopt

dus punt M ligt op de lijn HZ

dus de punt M, H en Z liggen op één lijn

Opgave 82:



Opgave 83:

a. assenstelsel met $A(-\frac{1}{2}d,0)$ en $B(\frac{1}{2}d,0)$

punt P ligt op de cirkels $(x+\frac{1}{2}d)^2+y^2=r^2$ en $(x-\frac{1}{2}d)^2+y^2=k^2r^2$

dus P op $x^2+dx+\frac{1}{4}d^2+y^2=r^2$ en $x^2-dx+\frac{1}{4}d^2+y^2=k^2r^2$

$$\begin{cases} x^2+dx+\frac{1}{4}d^2+y^2=r^2 \\ x^2-dx+\frac{1}{4}d^2+y^2=k^2r^2 \quad - \end{cases}$$

$$2dx=r^2-k^2r^2$$

$$2dx=r^2\cdot(1-k^2)$$

$$r^2=\frac{2dx}{1-k^2}$$

$$(x+\tfrac{1}{2}d)^2+y^2=\frac{2dx}{1-k^2}$$

$$x^2+dx+\tfrac{1}{4}d^2-\frac{2dx}{1-k^2}+y^2=0$$

$$x^2+\frac{d(1-k^2)x}{1-k^2}-\frac{2dx}{1-k^2}+y^2=-\tfrac{1}{4}d^2$$

$$x^2+\frac{d(-1-k^2)}{1-k^2}x+y^2=-\tfrac{1}{4}d^2$$

$$x^2+\frac{d(k^2+1)}{k^2-1}x+y^2=-\tfrac{1}{4}d^2$$

$$\left(x+\tfrac{1}{2}d\cdot\tfrac{k^2+1}{k^2-1)}\right)^2-\tfrac{1}{4}d^2\cdot\left(\tfrac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=-\tfrac{1}{4}d^2$$

$$\left(x+\tfrac{1}{2}d\cdot\tfrac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{4}d^2\cdot\left(\tfrac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2-\tfrac{1}{4}d^2$$

en dit is een cirkel met middelpunt $\left(-\frac{1}{2}d\cdot\frac{k^2+1}{k^2-1},0\right)$ en straal $\sqrt{\frac{1}{4}d^2\cdot\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2-\frac{1}{4}d^2}$

b. als $k=1$ geldt: $AP=BP$ dus dan liggen alle punten P op de middelloodlijn van AB

Opgave 84:

a. $C(1,a)$

cirkel: $(x-1)^2+y^2=1$

D is het snijpunt van lijn AC en de cirkel, dus:

$$(x-1)^2+a^2x^2=1$$

$$x^2-2x+1+a^2x^2=1$$

$$(a^2+1)x^2-2x=0$$

$$x((a^2+1)x-2)=0$$

$$x=0 \quad \vee \quad (a^2+1)x=2$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=\frac{2}{a^2+1}$$

$$(0,0) \qquad \left(\frac{2}{a^2+1},\frac{2a}{a^2+1}\right)$$

b. $x_C-x_E=x_D-x_C$

$x_E = 2x_C - x_D = 2 - \frac{2}{a^2+1} = \frac{2(a^2+1)-2}{a^2+1} = \frac{2a^2}{a^2+1}$

zo ook: $y_E = 2y_C - y_D = 2a - \frac{2a}{a^2+1} = \frac{2a(a^2+1)-2a}{a^2+1} = \frac{2a^3}{a^2+1}$

dus $E\left(\frac{2a^2}{a^2+1}, \frac{2a^3}{a^2+1}\right)$

c. lijn BE: $y - 0 = \frac{0 - \frac{2a^3}{a^2+1}}{2 - \frac{2a^3}{a^2+1}} \cdot (x-2)$

$y = \frac{-\frac{2a^3}{a^2+1}}{\frac{2(a^2+1)-2a^2}{a^2+1}} \cdot (x-2)$

$y = \frac{-\frac{2a^3}{a^2+1}}{\frac{2}{a^2+1}} \cdot (x-2)$

$y = -a^3 \cdot (x-2)$

punt F ligt op lijn BE, dus $x_F = 1$ dus $y_F = a^3$

$MB = 1$

$MF = a^3$

$MC = y_C = a$ dus $MC^3 = a^3$

$MF \cdot MB^2 = a^3 \cdot 1^2 = a^3 = MC^3$