Hoofdstuk 14: Krommen

14.1 Symmetrie

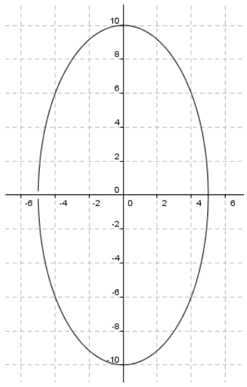
Opgave 1:

a. $4x^2 + y^2 = 100$

$y^2 = 100 - 4x^2$

$y = \sqrt{100 - 4x^2} \quad \vee \quad y = -\sqrt{100 - 4x^2}$

b.



c. $y = \sqrt{100 - 4 \cdot 3^2} = 8 \quad \vee \quad y = -\sqrt{100 - 4 \cdot 3^2} = -8$

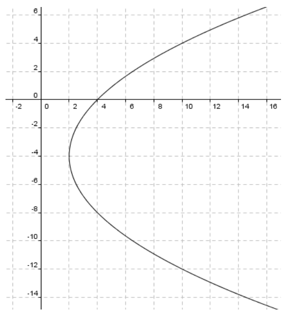
d. $4x^2 + 36 = 100$

$4x^2 = 64$

$x^2 = 16$

$x = 4 \quad \vee \quad x = -4$

Opgave 2:



a. $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

$(y+4)^2 - 16 - 8x + 32 = 0$

$(y+4)^2 = 8x - 16$

$y + 4 = \pm\sqrt{8x - 16}$

$y = -4 \pm \sqrt{8x - 16}$

b. $(y+4)^2 = 8x - 16$

$(y+4)^2 = 8(x-2)$

dus K is een parabool met top $(2,-4)$, brandpunt $F(4,-4)$ en richtlijn $x = 0$

Opgave 3:

a. $4x^2 + 6y^2 + 16x - 36y + 46 = 0$

$4(x^2 + 4x) + 6(y^2 - 6y) + 46 = 0$

$4((x+2)^2 - 4) + 6((y-3)^2 - 9) + 46 = 0$

$4(x+2)^2 - 16 + 6(y-3)^2 - 54 + 46 = 0$

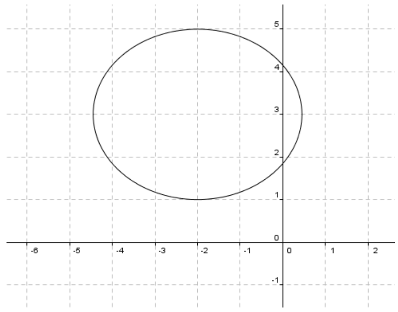
$4(x+2)^2 + 6(y-3)^2 = 24$

$6(y-3)^2 = 24 - 4(x+2)^2$

$(y-3)^2 = 4 - \frac{2}{3}(x+2)^2$

$y-3=\pm\sqrt{4-\frac{2}{3}(x+2)^2}$

$y=3\pm\sqrt{4-\frac{2}{3}(x+2)^2}$



b. $4(x+2)^2+6(y-3)^2=24$

$\frac{(x+2)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

dus K is een ellips met middelpunt $(-2,3)$

de toppen zijn $(-2-\sqrt{6},3)$, $(-2+\sqrt{6},3)$, $(-2,1)$ en $(-2,5)$

$c^2=a^2-b^2=6-4=2$ dus de brandpunten zijn $F_1(-2-\sqrt{2},3)$ en $F_2(-2+\sqrt{2},3)$

Opgave 4:

a. $9x^2-16y^2+54x+64y-127=0$

$9(x^2+6x)-16(y^2-4y)-127=0$

$9((x+3)^2-9)-16((y-2)^2-4)-127=0$

$9(x+3)^2-81-16(y-2)^2+64-127=0$

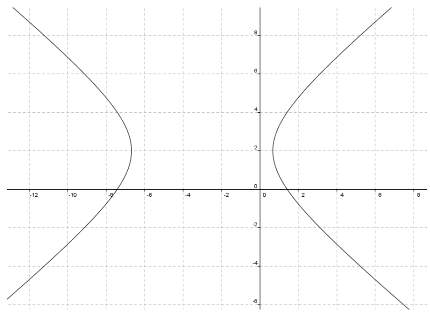
$9(x+3)^2-16(y-2)^2=144$

$-16(y-2)^2=144-9(x+3)^2$

$(y-2)^2=-9+\frac{9}{16}(x+3)^2$

$y-2=\pm\sqrt{-9+\frac{9}{16}(x+3)^2}$

$y=2\pm\sqrt{-9+\frac{9}{16}(x+3)^2}$



b. $9(x+3)^2-16(y-2)^2=144$

$\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$

dus K is een hyperbool met middelpunt $(-3,2)$

de toppen zijn $(-7,2)$ en $(1,2)$

$c^2=a^2+b^2=16+9=25$

dus de brandpunten zijn $F_1(-8,2)$ en $F_2(2,2)$

de asymptoten zijn $y-2=\frac{3}{4}(x+3)$ en $y-2=-\frac{3}{4}(x+3)$

ofwel $y=\frac{3}{4}x+4\frac{1}{4}$ en $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

c. $324-16(y-2)^2=144$

$-16(y-2)^2=-180$

$(y-2)^2=11{,}25$

$y-2=\sqrt{11{,}25}\quad\vee\quad y-2=-\sqrt{11{,}25}$

$y=2+\sqrt{11{,}25}=5{,}354\quad\vee\quad y=2-\sqrt{11{,}25}=-1{,}354$

$AB=5{,}354--1{,}354=6{,}708$

d. $9(x+3)^2-144=144$

$9(x+3)^2=288$

$(x+3)^2=32$

$x+3=\sqrt{32}\quad\vee\quad x+3=-\sqrt{32}$

$x = -3 + \sqrt{32} = 2{,}657 \quad \vee \quad x = -3 - \sqrt{32} = -8{,}657$

$CD = 2{,}657 - -8{,}657 = 11{,}314$

e. $x - 2y + 10 = 0$

$-2y = -x - 10$

$y = \frac{1}{2}x + 5$

neem $y_1 = 2 + \sqrt{-9 + \frac{9}{16}(x+3)^2}$ en $y_2 = 2 - \sqrt{-9 + \frac{9}{16}(x+3)^2}$ en $y_3 = \frac{1}{2}x + 5$

intersect van y_1 en y_3 geeft $(5{,}682;7{,}931)$

intersect van y_2 en y_3 geeft $(-7{,}062;1{,}469)$

$EF = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 14{,}289$

Opgave 5:

a. (a,b) op de ellips, dus $4a^2 + b^2 = 100$

$(a,-b)$ invullen geeft $4a^2 + (-b)^2 = 100$ ofwel $4a^2 + b^2 = 100$

dus dan ligt $(a,-b)$ op de ellips

b. $(-a,b)$ invullen geeft: $4(-a)^2 + b^2 = 100$ ofwel $4a^2 + b^2 = 100$

dus $(-a,b)$ ligt op de ellips

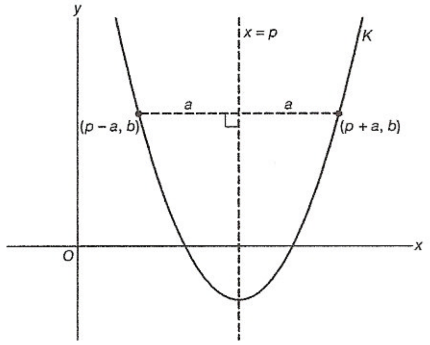
$(-a,-b)$ invullen geeft: $4(-a)^2 + (-b)^2 = 100$ ofwel $4a^2 + b^2 = 100$

dus $(-a,-b)$ ligt op de ellips

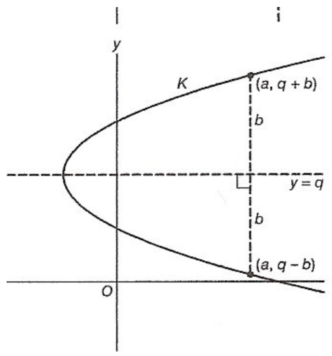
c. (b,a) invullen geeft: $4b^2 + a^2 = 100$ dus het punt (b,a) ligt niet op de ellpis

Opgave 6:

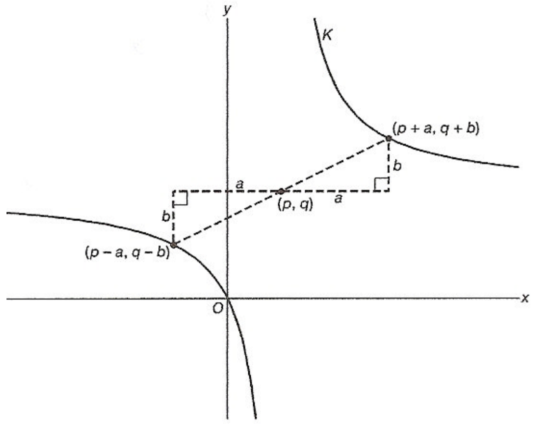
a.



b.



c.



Opgave 7:

$(a,-1+b)$ ligt op K dus: $9a^2-4(-1+b)^2-36a-8(-1+b)-4=0$

$9a^2-4+8b-4b^2-36a+8-8b-4=0$

$9a^2-36a-4b^2=0$

$(a,-1-b)$ invullen geeft: $9a^2-4(-1-b)^2-36a-8(-1-b)-4=0$

$9a^2-4-8b-4b^2-36a+8+8b-4=0$

$9a^2-36a-4b^2=0$

dus $(a,-1-b)$ ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $y=-1$

Opgave 8:

a. $(a,-4+b)$ ligt op K dus: $(-4+b)^2-8a+8(-4+b)+32=0$

$16-8b+b^2-8a-32+8b+32=0$

$b^2-8a+16=0$

$(a,-4-b)$ invullen geeft: $(-4-b)^2-8a+8(-4-b)+32=0$

$16+8b+b^2-8a-32-8b+32=0$

$b^2-8a+16=0$

dus $(a,-4-b)$ ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $y=-4$

b. $(-2+a,3+b)$ ligt op K dus:

$4(-2+a)^2+6(3+b)^2+16(-2+a)-36(3+b)+46=0$

$16-16a+4a^2+54+36b+6b^2-32+16a-108-36b+46=0$

$4a^2+6b^2-24=0$

$(-2-a,3-b)$ invullen geeft:

$4(-2-a)^2+6(3-b)^2+16(-2-a)-36(3-b)+46=0$

$16+16a+4a^2+54-36b+6b^2-32-16a-108+36b+46=0$

$4a^2+6b^2-24=0$

dus $(-2-a,3-b)$ ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $(-2,3)$

c. (a,b) ligt op K dus: $a^2+b^2-2ab-2a-2b-3=0$

(b,a) invullen geeft: $b^2+a^2-2ba-2b-2a-3=0$

$a^2+b^2-2ab-2a-2b-3=0$

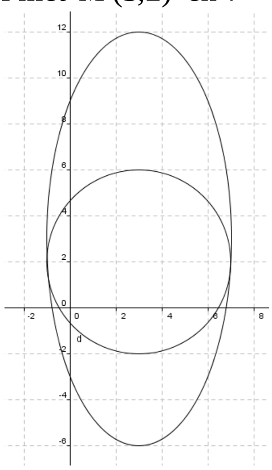
dus (b,a) ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $y=x$

Opgave 9:
De kromme van opgave 2 is symmetrisch t.o.v. $y = -4$.
De kromme van opgave 3 is symmetrisch t.o.v. $y = 3$.
De kromme van opgave 4 is symmetrisch t.o.v. $y = 2$.

Opgave 10:
a. $(-3+a, 2+b)$ ligt op K dus:
$9(-3+a)^2 - 16(2+b)^2 + 54(-3+a) + 64(2+b) - 127 = 0$
$81 - 54a + 9a^2 - 64 - 64b - 16b^2 - 162 + 54a + 128 + 64b - 127 = 0$
$9a^2 - 16b^2 - 144 = 0$
$(-3-a, 2-b)$ invullen geeft:
$9(-3-a)^2 - 16(2-b)^2 + 54(-3-a) + 64(2-b) - 127 = 0$
$81 + 54a + 9a^2 - 64 + 64b - 16b^2 - 162 - 54a + 128 - 64b - 127 = 0$
$9a^2 - 16b^2 - 144 = 0$
dus $(-3-a, 2-b)$ ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $(-3,2)$
b. voor L geldt:
$9(x-3)^2 - 16(y+2)^2 + 54(x-3) + 64(y+2) - 127 = 0$
$9x^2 - 54x + 81 - 16y^2 - 64y - 64 + 54x - 162 + 64y + 128 - 127 = 0$
$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

Opgave 11:
$(\frac{1}{k}x)^2 + 4y^2 = 100$
$\frac{1}{k^2}x^2 + 4y^2 = 100$
$\frac{1}{4k^2}x^2 + y^2 = 25$
dus $\frac{1}{4k^2} = 1$
$k^2 = \frac{1}{4}$
$k = \frac{1}{2} \quad \vee \quad k = -\frac{1}{2}$

Opgave 12:
a. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0$
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ dit is een
cirkel met $M(3,2)$ en $r = 4$
b. ja



Opgave 13:

$V_{y-as}, -\frac{1}{2}$ dus vervang x door $-2x$

$(-2x)^2 + y^2 - 6(-2x) - 4y - 3 = 0$

$4x^2 + y^2 + 12x - 4y - 3 = 0$

$4(x^2 + 3x) + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0$

$4((x+1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}) + (y-2)^2 - 7 = 0$

$4(x+1\frac{1}{2})^2 - 9 + (y-2)^2 - 7 = 0$

$4(x+1\frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 = 16$

$\frac{(x+1\frac{1}{2})^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

L is een ellips met middelpunt $(-1\frac{1}{2},2)$ en toppen: $(-3\frac{1}{2},2), (\frac{1}{2},2), (-1\frac{1}{2},6)$ en $(-1\frac{1}{2},-2)$

$c^2 = b^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$ dus de brandpunten zijn $F_1(-1\frac{1}{2}, 2-\sqrt{12})$ en $F_2(-1\frac{1}{2}, 2+\sqrt{12})$

Opgave 14:

a. $M(2,4)$, $a = 2$ en $b = 3$

$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ ofwel $9(x-2)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

b. de korte as heeft lengte 4 en de lange as heeft lengte 6, dus als je een cirkel nodig hebt moet je t.o.v. de y-as vermenigvuldigen met $1\frac{1}{2}$

vervang x door $\frac{2}{3}x$

$9(\frac{2}{3}x - 2)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$9(\frac{2}{3}(x-3))^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$9 \cdot \frac{4}{9}(x-3)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$4(x-3)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$ dit is een cirkel met $M(3,4)$ en $r = 3$

c. t.o.v. de x-as moet je vermenigvuldigen met $\frac{2}{3}$, dus vervang y door $\frac{3}{2}y$

$9(x-2)^2 + 4(\frac{3}{2}y - 4)^2 = 36$

$9(x-2)^2 + 4(\frac{3}{2}(y - 2\frac{2}{3}))^2 = 36$

$9(x-2)^2 + 4 \cdot \frac{9}{4}(y - 2\frac{2}{3})^2 = 36$

$9(x-2)^2 + 9(y - 2\frac{2}{3})^2 = 36$

$(x-2)^2 + (y - 2\frac{2}{3})^2 = 4$ dit is een cirkel met $M(2, 2\frac{2}{3})$ en $r = 2$

Opgave 15:

a. top is $(3,1)$ dus $(y-1)^2 = 2p(x-3)$ door $(4,3)$

$4 = 2p$

$(y-1)^2 = 4(x-3)$

b. $(a,7)$ ligt op de parabool, dus $36 = 4(a-3)$

$a - 3 = 9$

$a = 12$

$(12,7)$ moet het punt $(6,7)$ worden, dus je moet met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen dus vervang x door $2x$

$(y-1)^2 = 4(2x-3)$

$(y-1)^2 = 8(x-1\tfrac{1}{2})$ dus de beeldgrafiek is een parabool

c. $(19,b)$ ligt op de parabool

$(b-1)^2 = 64$

$b-1=8 \quad \vee \quad b-1=-8$

$b=9 \quad \vee \quad b=-7$ (vervalt hier)

$(19,9)$ moet het punt $(19,3)$ worden, dus je moet met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigen

dus vervang y door $3y$

$(3y-1)^2 = 4(x-3)$

$(3(y-\tfrac{1}{3}))^2 = 4(x-3)$

$9(y-\tfrac{1}{3})^2 = 4(x-3)$

$(y-\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{4}{9}(x-3)$ dus de beeldgrafiek is een parabool

d. $(3,1)$ moet het punt $(6,2)$ worden, dus je moet met 2 vermenigvuldigen

dus vervang x door $\frac{1}{2}x$ en y door $\frac{1}{2}y$

$(\tfrac{1}{2}y-1)^2 = 4(\tfrac{1}{2}x-3)$

$(\tfrac{1}{2}(y-2))^2 = 4(\tfrac{1}{2}(x-6))$

$\tfrac{1}{4}(y-2)^2 = 2(x-6)$

$(y-2)^2 = 8(x-6)$ dus de beeldgrafiek is een parabool

Opgave 16:

a. vervang x door $\frac{1}{k}x$

$(y-y_T)^2 = 2p(\tfrac{1}{k}x-x_T)$

$(y-y_T)^2 = 2p(\tfrac{1}{k}(x-kx_T)$

$(y-y_T)^2 = \tfrac{2}{k}p(x-kx_T)$ dus de beeldgrafiek is een parabool

b. vervang x door $\frac{1}{k}x$

$$\frac{(\frac{1}{k}x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(\frac{1}{k}(x-kx_M))^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{1}{k^2}(x-kx_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-kx_M)^2}{k^2a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$\dfrac{(x-kx_M)^2}{(ka)^2}+\dfrac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$ dus de beeldgrafiek is een ellips

c. vervang x door $\frac{1}{k}x$

$$\frac{(\frac{1}{k}x-x_M)^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(\frac{1}{k}(x-kx_M))^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{1}{k^2}(x-kx_M)^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-kx_M)^2}{k^2a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$\dfrac{(x-kx_M)^2}{(ka)^2}-\dfrac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$ dus de beeldgrafiek is een hyperbool